

बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन हेतु ऐतिहासिक पहल ...

शेखावाटी मिशन : 100

पढ़ेगा गणित (कक्षा : 10)

राजस्थान

बढ़ेगा

राजस्थान



विभिन्न विषयों की
नवीनतम बुकलेट डाउनलोड
करने हेतु टेलीग्राम
QR CODE स्कैन करें



कार्यालय : संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरु संभाग, चूरु (राज.)

» संयोजक कार्यालय - संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरु संभाग, चूरु «

शेखावाटी मिशन - 100 मार्गदर्शक



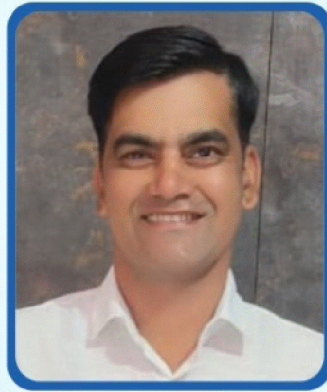
अनुसूया सिंह

संयुक्त निदेशक (स्कूल शिक्षा)
चूरु संभाग, चूरु



महेन्द्र सिंह बडसरा

संभागीय कॉर्डिनेटर शेखावाटी मिशन 100
संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरु संभाग, चूरु



रामावतार भदाला

तकनीकी सहयोगी शेखावाटी मिशन 100

संकलनकर्त्ता टीम : गणित



राकेश पुनियां

रा.उ.मा.वि. रोसावां
फतेहपुर (सीकर)



राकेश कुमार

रा.उ.मा.वि. टोही माधोपुरा
बगदियों की टापी (सीकर)



ओमप्रकाश मठाला

रा.उ.मा.वि. पलामरा
(सीकर)



रवि शंकर गौड़

भ.गां.रा.वि.
पलामना (सीकर)



हेमराज सैनी

रा.उ.मा.वि. मुजावास
पलामना (सीकर)



सुमन

रा.उ.मा.वि. पुरा बड़ी
घोद (सीकर)



संजय कुमार शर्मा

रा.उ.मा.वि. बराल
पिपरानी (सीकर)



मुकेश पारीक

रा.उ.मा.वि. नांगल नायुतर
श्रीमाधोपुर (सीकराधाना)

शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग, संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरु संभाग, चूरु (राज.)

प्रश्न-पत्र की योजना 2023-24

कक्षा — 10वीं
विषय — गणित
अवधि — 3 घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक — 80

1. उद्देश्य हेतु अंकभार —

क्र.सं.	उद्देश्य	अंकभार	प्रतिशत
1.	ज्ञान	20	25%
2.	अवबोध	21	26.25%
3.	ज्ञानोपयोग / अभिव्यक्ति	19	23.75%
4.	कौशल / मौलिकता	20	25%
योग		80	100

2. प्रश्नों के प्रकारवार अंकभार —

क्र. सं.	प्रश्नों का प्रकार	प्रश्नों की संख्या	अंक प्रति प्रश्न	कुल अंक	प्रतिशत (अंको का)	प्रतिशत (प्रश्नों का)	संभावित समय
1.	वस्तुनिष्ठ	15	1	15	18.75	29.41	30
2.	रिक्त स्थान	7	1	7	8.75	13.72	15
3.	अतिलघुत्तरात्मक	10	1	10	12.50	19.61	35
4.	लघुत्तरात्मक	12	2	24	30.00	23.53	45
5.	दीर्घउत्तरीय	4	3	12	15.00	7.84	35
6.	निबंधात्मक	3	4	12	15.00	5.89	35
योग		51		80	100	100	195 मिनट

विकल्प योजना : खण्ड 'स' एवं 'द' में हैं

3. विषय वस्तु का अंकभार —

क्र.सं.	विषय वस्तु	अंकभार	प्रतिशत
1	वास्तविक संख्याएँ	4	5%
2	बहुपद	4	5%
3	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	4	5%
4	द्विघात समीकरण	4	5%
5	समान्तर श्रेणियाँ	6	7.5%
6	त्रिभुज	4	5%
7	निदेशांक ज्यामिति	7	8.75%
8	त्रिकोणमिति का परिचय	8	10%
9	त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग	5	6.25%
10	वृत्त	6	7.5%
11	वृत्तों से सम्बन्धित क्षेत्रफल	5	6.25%
12	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	6	7.5%
13	सांख्यिकी	13	16.25%
14	प्रायिकता	4	5%

प्रश्न-पत्र ब्ल्यू प्रिन्ट 2023-24

पूर्णांक - 80

विषय :- गणित

कक्षा - 10वीं

क्र.सं.	उद्देश्य इकाई/उप इकाई	ज्ञान					अवबोध					ज्ञानोपयोग/अभिव्यक्ति					कौशल/मौलिकता					योग
		वस्तुनिष्ठ	रिक्त स्थान	अतिविवृतनात्मक	विवृतनात्मक	दीर्घवृतनात्मक	निबन्धानात्मक	वस्तुनिष्ठ	रिक्त स्थान	अतिविवृतनात्मक	विवृतनात्मक	दीर्घवृतनात्मक	निबन्धानात्मक	वस्तुनिष्ठ	रिक्त स्थान	अतिविवृतनात्मक	विवृतनात्मक	दीर्घवृतनात्मक	निबन्धानात्मक			
1	वास्तविक संख्याएँ	1(1)		1(1)	2(1)															4(3)		
2	बहुपद	1(1)		1(1)	2(1)															4(3)		
3	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	1(1)		1(1)	2(1)															4(3)		
4	द्विघात समीकरण					4(1)														4(1)		
5	समान्तर श्रेणियाँ						1(2)	1(1)												6(4)		
6	त्रिभुज																			6(4)		
7	निर्देशांक ज्यामिति						1(1)		1(1)	1(1)	2(1)	3(1)								7(4)		
8	त्रिकोणमिति का परिचय						1(1)	1(1)	2(1)	2(1)	4(1)									8(4)		
9	त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग																			5(4)		
10	वृत्त																			6(6)		
11	वृत्तों से सम्बन्धित क्षेत्रफल																			5(4)		
12	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन																			6(5)		
13	सांख्यिकी																			13(7)		
14	प्रायिकता	1(1)	1(1)		2(1)															4(3)		
	योग	4(4)	1(1)	3(3)	8(4)	4(1)	4(4)	2(2)	1(1)	4(2)	6(2)	4(1)	3(3)	3(3)	2(2)	4(2)	3(1)	4(1)	4(1)	80(51)		

विकल्पों की योजना :- खण्ड 'स' एवं 'द' में प्रत्येक में एक आंतरिक विकल्प है। नोट:- कोष्ठक के बाहर की संख्या अंकों की तथा अंदर की संख्या प्रश्नों के द्योतक है।

हस्ताक्षर

अध्याय

1

वास्तविक संख्याएँ

अंक (प्रश्न) 1(1) + 1 (1) + 2 (1) = 4 (3)

- ❖ परिमेय संख्याएँ :- ऐसी संख्याएँ जिनको $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सके। जहाँ p, q पूर्णांक संख्या है तथा $q \neq 0$ परिमेय संख्याएँ कहलाती है।

उदा. - $\frac{22}{7}, \sqrt{225}, \frac{4\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}, (3 + \sqrt{23}) - \sqrt{23}, 0,$

$\frac{1}{-3}, \frac{-2}{-3}$ आदि

- ❖ अपरिमेय संख्याएँ :- ऐसी संख्याएँ जिनको $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सके। अपरिमेय संख्याएँ कहलाती है।

उदा. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - \sqrt{5}, 2.23606....., 2 + \sqrt{2}$ आदि

- ❖ वास्तविक संख्याएँ :- सभी परिमेय संख्या और अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से लिखने पर वास्तविक संख्या प्राप्त होती है।

उदा. - $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \frac{22}{7}, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2}$ आदि

महत्वपूर्ण तथ्य:-

1. एक परिमेय तथा एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर एक अपरिमेय संख्या होती है।
2. एक अशुन्य - परिमेय संख्या तथा एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल तथा भागफल एक अपरिमेय संख्या होती है।
3. यदि दो अपरिमेय संख्याओं को जोड़े, घटाये, भाग दे या गुणा करने पर परिमेय या अपरिमेय संख्या दोनों में से कुछ भी आ सकता है।

- ❖ अंकगणित की आधारभूत प्रमेय:- प्रत्येक भाज्य संख्या का अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा यह गुणनखण्ड, अभाज्य गुणनखण्डों के आने के क्रम के बिना अद्वितीय होते है।

महत्वपूर्ण:- संख्या 1 न तो अभाज्य है तथा न ही भाज्य।

- ❖ दो धनात्मक पूर्णांकों के LCM व HCF अंकगणित को आधारभूत प्रमेय या अभाज्य गुणनखण्ड विधि से ज्ञात किया जाता है।

- ❖ दो धनात्मक पूर्णांक a व b के लिए

$LCM(a, b) \times HCF(a, b) = a \times b$ होता है

अर्थात् दो संख्याओं का गुणनफल = HCF \times LCM

महत्वपूर्ण तथ्य :-

1. दी गई संख्याओं का HCF किसी संख्या से बड़ा नहीं हो सकता।
2. दी गई संख्याओं का LCM किसी संख्या से छोटा नहीं हो सकता।
3. दो सहअभाज्य संख्याओं का HCF 1 होता है।

उदा. दो संख्याओं 306 और 657 का HCF = 9 हो तो LCM ज्ञात करें -

हल: दो संख्याओं के LCM व HCF में निम्न सम्बन्ध होता है -

दो संख्याओं का गुणनफल = HCF \times LCM

$306 \times 657 = 9 \times LCM$

$$LCM = \frac{306 \times 657}{9}$$

LCM = 22338

उदा. अभाज्य गुणनखण्ड विधि से 6, 72 और 120 का LCM व HCF ज्ञात करें।

हल: $6 = 2 \times 3 = 2^1 \times 3^1$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$

$LCM(6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

$= 8 \times 9 \times 5$

$= 360$

$HCF(6, 72, 120) = 2^1 \times 3^1$

$= 2 \times 3$

$= 6$

उदा. 3825 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किजिए -

3	3825
3	1275
5	425
5	85
17	17
	1

$$3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$$

$$= 3^2 \times 5^2 \times 17$$

$$(3) 8 \quad (4) 4 \quad (4)$$

महत्वपूर्ण प्रश्न :-

1. निम्नलिखित में से कौनसी अपरिमेय संख्या नहीं है-

- (1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{24}$
 (3) $\sqrt{35}$ (4) $\sqrt{121}$ (4)

2. $2 - \sqrt{3}$ है-

- (1) परिमेय संख्या (2) अपरिमेय संख्या
 (3) सम संख्या (4) पूर्णांक संख्या (2)

3. π एक है -

- (1) परिमेय संख्या (2) अपरिमेय संख्या
 (3) वास्तविक संख्या (4) 2 व 3 दोनों (4)

4. दो संख्याओं का म.स. 15 व ल.स. 105 है। यदि उनमें से एक 5 है। तो दूसरी संख्या क्या होगी -

- (1) 75 (2) 15
 (3) 315 (4) 525 (3)

5. निम्न में से अपरिमेय संख्या है-

- (1) 2 (2) 2.232425.....
 (3) $2.\overline{23}$ (4) $\frac{22}{7}$ (2)

6. 144 के अभाज्य गुणनखण्डों में 2 की घात है-

- (1) 4 (2) 5
 (3) 6 (4) 3 (1)

7. यदि P^2 एक सम संख्या है तो P एक:-

- (1) विषम संख्या है (2) सम संख्या है
 (3) कह नहीं सकते (4) इनमें से कोई नहीं (2)

8. यदि संख्या a तथा 18 का LCM = 36 तथा a और 18 का HCF = 2 है तो a का मान होगा -

- (1) 1 (2) 2
 (3) 5 (4) 4 (4)

9. संख्याओं 96 और 404 का म.स. होगा -

- (1) 16 (2) 12

10. दो परिमेय संख्याओं के बीच कितनी परिमेय संख्याएँ होती हैं-

उ. अनन्त

11. संख्याएँ $7 \times 11 \times 13 + 13$ व $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ कौनसी संख्या है

उ. भाज्य संख्या

12. दो संख्याओं a व b का HCF क्या होगा -

उ. एक

13. 156 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किजिए -

उ.

2	156
2	78
3	39
13	13
	1

$$156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$$

$$= 2^2 \times 3^1 \times 13^1$$

14. 144 व 198 का महत्तम समावर्त्य (म.स.) क्या होगा -

उ. 18

15. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 510 और 92 का महत्तम समावर्तक और लघुत्तम समावर्तक ज्ञात किजिए।

हल. $510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$

$$92 = 2 \times 2 \times 23$$

$$\text{HCF} (510, 92) = 2^1$$

$$= 2$$

$$\text{LCM} (510, 92) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23$$

$$= 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23$$

$$= 23460$$

16. दो संख्याओं 90 व 144 का LCM = 720 होतो HCF ज्ञात करें।

हल. दो संख्याओं के LCM व HCF में निम्न सम्बन्ध होता है-

$$\text{दो संख्याओं का गुणनफल} = \text{LCM} \times \text{HCF}$$

$$90 \times 144 = 720 \times \text{HCF}$$

$$\text{HCF} = \frac{90 \times 144}{720}$$

$$\text{HCF} = 18$$

17. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल. माना कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \quad (\text{जहाँ } a, b \text{ सहअभाज्य पूर्णांक हैं})$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(\sqrt{3})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$3 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$3b^2 = a^2$$

अतः 3, a^2 को विभाजित करेगा।

इसलिए 3, a को विभाजित करेगा।

माना $a = 3c$, जहाँ c एक पूर्णांक है

$$3b^2 = (3c)^2$$

$$3b^2 = 9c^2$$

$$b^2 = 3c^2$$

अतः 3, b^2 को विभाजित करेगा

इसलिए 3, b को विभाजित करेगा।

अतः a व b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 3 है।

परन्तु यह इस तथ्य का विरोध करता है कि a और b सहअभाज्य पूर्णांक हैं।

अतः हमारी परिकल्पना गलत है।

अतः $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

18. सिद्ध कीजिए कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है

हल. माना कि $5 - \sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। अतः इसे $\frac{P}{Q}$ इसमें लिख सकते हैं।

$$5 - \sqrt{3} = \frac{P}{Q}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = 5 - \frac{P}{Q}$$

$\therefore P, Q, 5$ सभी पूर्णांक हैं।

$\therefore 5 - \frac{P}{Q}$ एक परिमेय संख्या है।

तो $\sqrt{3}$ भी एक परिमेय संख्या होगी, जो इसका विरोध करता है कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। इसलिए हमारी परिकल्पना गलत है।

अतः $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

19. सिद्ध कीजिए कि $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल. माना $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ (जहाँ a तथा b सहअभाज्य पूर्णांक हैं $b \neq 0$)

$$\sqrt{5} = \frac{a}{7b}$$

$\therefore \sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी, जो कि इस तथ्य का विरोधाभास है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

यह विरोधाभास हमारी गलत परिकल्पना के कारण उत्पन्न हुआ।

अतः $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अध्याय

2

बहुपद

अंक (प्रश्न) 1 (1) + 1 (1) + 2 (1) = 4 (3)

❖ बहुपद :- ऐसा बीजीय व्यंजक जिसमें उपस्थित चर राशि की घात एक पूर्ण संख्या हो। बहुपद कहलाता है तथा चर राशि की उच्चतम घात ही बहुपद की घात होती है।

उदा. $4x+5, 3x^2+x+4, 2-x^2, 4x^0, \sqrt{3}a + \sqrt{7}, \sqrt{5}t^2,$

$3x^3 - 2x^2 + x - 1$ आदि

❖ रैखिक बहुपद:- ऐसा बहुपद जिसमें उपस्थित चर राशि की घात एक हो। रैखिक बहुपद कहलाता है।

❖ x चर राशि के रैखिक बहुपद को $p(x)=ax+b$ जहाँ a, b वास्तविक संख्या है तथा $a \neq 0$

उदा. $P(x)=4x+5, P(x)=5x, P(x)=2x+3, P(x)=\sqrt{3}x+5$

❖ द्विघात बहुपद :- ऐसा बहुपद जिसमें उपस्थित चर राशि की घात 2 हो। द्विघात बहुपद कहलाता है।

❖ x चर राशि में द्विघात बहुपद को $p(x)=ax^2+bx+c$ से लिखते हैं, जहाँ a, b, c तीन वास्तविक संख्या है तथा $a \neq 0$

उदा. $p(x)=x^2+2x+1, p(x)=x^2-4, p(x)=5x^2,$
 $p(x)=\sqrt{3}x+2-x^2$

❖ त्रिघात बहुपद:- ऐसा बहुपद जिसमें उपस्थित चर राशि की घात 3 हो त्रिघात बहुपद कहलाता है।

❖ x चर राशि में त्रिघात बहुपद को $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ से लिखते हैं, जहाँ a, b, c, d वास्तविक संख्या है। तथा $a \neq 0$

उदा. $p(x)=\sqrt{2}x^3, p(x)=3-x^2+x^3, p(x)=3x^3-2x^2+x-1$

❖ यदि $p(x)$, चर x में कोई बहुपद है और k कोई वास्तविक संख्या है। तो $p(x)$ में x को k से प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त वास्तविक संख्या $p(x)$ का $x=k$ पर मान कहलाता है। तथा इसे $p(k)$ से निरूपित किया जाता है।

उदा. 1. $p(x)=x^2-3x-4$ का $x=-1$ पर मान ज्ञात कीजिए।

उ. बहुपद $p(x)=x^2-3x-4$

$x=-1$ रखने पर

$p(-1)=(-1)^2-3(-1)-4$

$p(-1)=1+3-4$

$p(-1)=4-4$

$p(-1)=0$

❖ बहुपद के शून्यक :- एक वास्तविक संख्या K बहुपद $p(x)$ का शून्यक कहलाती है। यदि $p(k)=0$

अर्थात् बहुपद में उपस्थित चर राशि का वह मान जिसको बहुपद में रखने पर 0 प्राप्त हो। चर राशि का वह मान बहुपद का शून्यक कहलाता है।

❖ जितनी बहुपद की घात होगी। उतने ही बहुपद के शून्यक होंगे।

उदा. रैखिक बहुपद $p(x)=3x-4$ के शून्यक ज्ञात करो।

उ. माना कि $p(x)$ बहुपद का शून्यक k है तो

$p(k)=0$

अतः $3x-4=0$

$3x=4$

$x=\frac{4}{3}$

अतः $x=\frac{4}{3}$ बहुपद का शून्यक होगा।

❖ बहुपद के शून्यकों व गुणांकों में सम्बन्ध:-

1. रैखिक बहुपद $p(x) = ax+b$ का शून्यक

$$= \frac{-b}{a} = \frac{-(\text{अचरपद})}{x \text{ का गुणांक}}$$

2. द्विघात बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ के दो शून्यक माना कि α और β है तो

$$\text{शून्यकों का योग} = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

3. माना कि α, β, γ त्रिघात बहुपद $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ के तीन शून्यक है तो

$$\text{शून्यकों का योग} = \alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a} = \frac{-x^2 \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

शून्यकों का गुणनफल $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} = \frac{-\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

और $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

❖ महत्वपूर्ण तथ्य:-

1. रैखिक बहुपद $p(x)=ax+b$ को शून्य के बराबर रखकर शून्यक ज्ञात किया जा सकता है।
2. द्विघात बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ के शून्यक ज्ञात करने के लिए इसके दो गुणखण्ड करके दोनों को अलग-अलग शून्य के बराबर रखकर मान ज्ञात किया जाता है।

❖ गुणखण्ड ज्ञात करने के लिए द्विघात बहुपद में x के गुणांक b के दो ऐसे गुणखण्ड करते हैं कि उनको जोड़ने या घटाने पर b प्राप्त हो तथा गुणा करने पर ac प्राप्त हो।

3. त्रिघात बहुपद $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ के शून्यक ज्ञात करने के लिए पहले इसका एक गुणखण्ड ज्ञात किया जाता है तथा इस गुणखण्ड का त्रिघात बहुपद में भाग देते हैं। जिसका भागफल एक द्विघात बहुपद प्राप्त होता है। द्विघात बहुपद फिर दो और गुणखण्ड करके शून्यक ज्ञात किया जाता है।

❖ जब शून्यकों का योग और शून्यकों का गुणनफल दिया हुआ हो तो द्विघात बहुपद ज्ञात करने का सूत्र $x^2 - (\text{शून्यकों का योग})x + \text{शून्यकों का गुणनफल}$

1. निम्न में से बहुपद है -

- (1) $\sqrt{3}x^2 + 4$ (2) $3\sqrt{x} + 1$
 (3) $y + \frac{2}{y}$ (4) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ (1)

2. निम्न में से रैखिक बहुपद है -

- (1) $4x^2 - 3$ (2) $4x - 1$
 (3) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (4) 5 (2)

3. निम्न में से द्विघात बहुपद है-

- (1) $3x + 4$ (2) 4
 (3) $x + \frac{1}{x^2}$ (4) $2x^2 - 3x + 1$ (4)

4. बहुपद $p(x)=4x^2+7x-5x^3$ की घात है -

- (1) 4 (2) 0
 (3) 3 (4) 2 (3)

5. बहुपद $p(t)=t^2-15$ के शून्यक होंगे -

- (1) $15, 15$ (2) $-15, 15$
 (3) $\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (4) $\sqrt{15}, -\sqrt{15}$ (4)

6. बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ में शून्यकों का गुणफल होगा?

- (1) $-\frac{b}{a}$ (2) 1
 (3) $-\frac{b}{c}$ (4) $\frac{c}{a}$ (4)

7. बहुपद $p(x)=ax^2+bx+c$ में शून्यकों का योग होगा?

- (1) $-\frac{b}{a}$ (2) 1
 (3) $-\frac{b}{c}$ (4) $\frac{c}{a}$ (1)

8. यदि बहुपद $p(x)=x^2-2x+5$ के शून्यक a, b हैं तो ab का मान क्या होगा?

- (1) -2 (2) 5
 (3) 3 (4) -5 (2)

9. बहुपद $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ में शून्यकों का योग होगा?

- (1) $-\frac{c}{a}$ (2) $-\frac{b}{a}$
 (3) $-\frac{b}{d}$ (4) $\frac{c}{a}$ (2)

10. यदि बहुपद $2x^2+x+k$ का शून्यक 3 है तो k का मान होगा-

- (1) 12 (2) 21
 (3) 24 (4) -21 (4)

11. यदि किसी बहुपद के शून्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ हैं तो बहुपद के गुणखण्ड क्रमशः होंगे:-

- (1) $(x-2), (x-2)$ (2) $(x+\sqrt{2}), (x+2)$
 (3) $(x-\sqrt{2}), (x+\sqrt{2})$
 (4) $(x+\sqrt{2}), (x+\sqrt{2})$ (3)

12. बहुपद के शून्यकों का योगफल तथा गुणनफल क्रमशः 0 और $\sqrt{5}$ हो तो बहुपद होगा -

- (1) $x^2 - x + 5$ (2) $x^2 - \sqrt{5}$
 (3) $x^2 + \sqrt{5}$ (4) $x^2 - 2x + \sqrt{5}$ (3)

13. एक द्विघात बहुपद के शून्यकों की अधिकतम संख्या क्या होती है?

- (1) 0 (2) 3
 (3) 1 (4) 2 (4)

14. बहुपद $p(x)=x^2-2x-8$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल. $x^2-2x-8=0$
 $= x^2-4x+2x-8=0$
 $= x(x-4)+2(x-4)=0$
 $= (x-4)(x+2)=0$
 $= x-4=0, x+2=0$
 $= x=4, x=-2$

बहुपद के शून्यक 4, -2 होंगे।

15. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः -3 और 2 है।

हल. माना कि द्विघात बहुपद के शून्यक α, β है

$$\alpha + \beta = -3$$

$$\alpha\beta = 2$$

द्विघात बहुपद $= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$
 $= x^2 + 3x + 2$

16. द्विघात बहुपद $p(x)=6x^2-3-7x$ के शून्यक ज्ञात कीजिए व शून्यको व गुणाको में सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल. $p(x)=6x^2-3-7x$
 $p(x)=6x^2-7x-3$
 $p(x)=6x^2+(-7)x+(-3)\dots\dots\dots(1)$
 द्विघात बहुपद का व्यापक रूप
 $p(x)=ax^2+bx+c \dots\dots\dots(2)$

शून्यक -
 $6x^2-7x-3 = 6x^2-9x+2x-3$
 $=3x(2x-3)+1(2x-3)$
 $=(2x-3)(3x+1)$
 यहाँ $2x-3=0, 3x+1=0$
 $2x=3, 3x = -1$

$$x = \frac{3}{2}, x = \frac{-1}{3}$$

अतः शून्यक $\frac{3}{2}, \frac{-1}{3}$ होंगे।

सभी, (1) व (2) में गुणाको की तुलना करने पर

$$a = 6, b = -7, c = -3$$

शून्यकों व गुणाको में सम्बन्ध -

$$\text{शून्यकों का योग} = \frac{-b}{a}, \text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{3}{2} + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-(-7)}{6}, \quad \frac{3}{2} \times \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-3}{6},$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}, \quad \frac{3}{2} \times \frac{-1}{3} = \frac{-1}{2},$$

$$\frac{9-2}{6} = \frac{7}{6}, \quad -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$7 = 7$$

17. यदि द्विघात व्यंजक $Kx^2+5x+3k$ के शून्यकों का योग, उनके गुणनफल के बराबर हो, तो k का माना ज्ञात कीजिए।

हल. द्विघात व्यंजक $kx^2+5x+3k$ की तुलना द्विघात व्यंजक ax^2+bx+c से करने पर -

$$a = k, b = 5, c = 3k$$

$$\text{शून्यकों का योग} = \frac{-b}{a} = -\frac{5}{k}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{c}{a} = \frac{3k}{k} = 3$$

प्रश्नानुसार, शून्यकों का योग = शून्यकों का गुणनफल

$$\frac{-5}{k} = 3$$

$$k = \frac{-5}{3}$$

18. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिनके शून्यकों का योग

तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएँ हैं :- $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$

हल. माना कि बहुपद ax^2+bx+c है तथा इसके शून्यक α और β है।

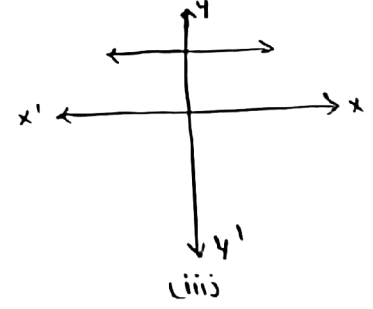
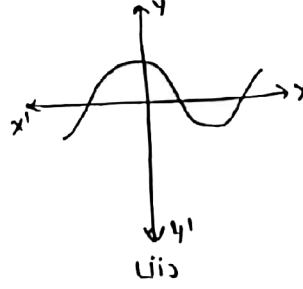
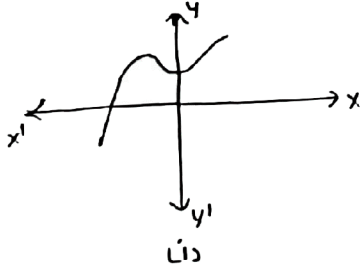
$$\text{तब } \alpha + \beta = \frac{-1}{4} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{तथा } \alpha\beta = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$$

यदि $a = 4, b = 1, c = 1$ हो तो

द्विघात बहुपद $4x^2 + x + 1$ होगा।

19. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ दिया गया है प्रत्येक स्थिति में $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



हल.

एक शून्यक है, क्योंकि ग्राफ x -अक्ष को एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है।

तीन शून्यक है क्योंकि ग्राफ x -अक्ष को तीन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

कोई शून्यक नहीं है क्योंकि ग्राफ x -अक्ष को प्रतिच्छेद नहीं करता है।





@SHEKHAWAT
MISSION100

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें।

अध्याय

3

दो चर वाले रैखिक समीकरण - युग्म

अंक भार = 4, वस्तुनिष्ठ-1 (1 अंक), अतिलघुत्तरात्मक-1 (1 अंक), लघुत्तरात्मक - 1 (2 अंक)

- ❖ रैखिक समीकरण - ऐसा समीकरण जिसमें उपस्थित चर की घात एक हो, रैखिक समीकरण कहलाता है।
- ❖ दो चर वाला रैखिक समीकरण - जब समीकरण में दो चर उपस्थित हो और दोनों की घात एक-एक हो।
- ❖ दो चर वाले रैखिक समीकरण का आलेखन (ग्राफ) करने पर एक सरल रेखा प्राप्त होती है। अतः समीकरण युग्म में दो सरल रेखाएँ एक समतल पर प्राप्त होंगी। जिनकी स्थितियाँ -

- ❖ दो चर वाले रैखिक समीकरण का युग्म का व्यापक रूप-
 $a_1x+b_1y+c_1=0$ जहाँ $a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2$ -वास्तविक संख्याएँ हैं।
 $a_2x+b_2y+c_2=0$ x, y - चर हैं।

क्र.म.	रेखा युग्म	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	अनुपातों की तुलना	ग्राफीक निरूपण	बीजगणितीय निरूपण	संगत / असंगत
1.	$x-2y=0$ $3x+4y-20=0$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	प्रतिच्छेदी रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय हल)	संगत
2.	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$	$\frac{2}{4}$ $=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$ $=\frac{1}{2}$	$\frac{-9}{-18}$ $=\frac{1}{2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अपरिमित रूप से अनेक हल	संगत
3.	$x+3y-8=0$ $2x+6y-20=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$ $=\frac{1}{2}$	$\frac{-8}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समान्तर रेखाएँ	कोई हल नहीं	असंगत

❖ रैखिक समीकरणों को हल करने की बीजगणितीय विधि-

1. प्रतिस्थापन विधि - इसमें एक चर का मान दूसरे चर के पद में व्यक्त करके रैखिक समीकरण युग्म को हल करने के लिए प्रतिस्थापित करते हैं।
2. विलोपन विधि - इसमें एक चर का विलोपन करके दूसरे चर का मान ज्ञात करते हैं।
3. वज्र गुणन विधि
4. ग्राफीय विधि

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. $3x+2y=11$ को संतुष्ट करने वाला युग्म है -
 (1) (1, 4) (2) (2, 3)
 (3) (3, 5) (4) (1, 3) (1)
2. निम्न रैखिक समीकरण युग्म के हल हैं -
 $x + y = 14$; $x - y = 4$
 (1) $x = 5, y = 9$ (2) $x = 1, y = 10$
 (3) $x = 9, y = 5$ (4) $x = 4, y = 0$ (3)
3. k के किस मान के लिए निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म

का कोई हल नहीं है?

$$3x+y = 1; (2k-1)x+y = 2k+1 \text{ अ}$$

- (1) 1 (2) 2
(3) 3 (4) 4 (ब)

4. यदि समीकरण $y = mx+3$ में $x = -2$ व $y = 5$ प्रतिस्थापित करने पर m का मान होगा -

- (1) 1 (2) -1
(3) 0 (4) 2 (ब)

5. यदि $2x+y=6$ हो तो इसको संतुष्ट करने वाला युग्म है -

- (1) (1, 2) (2) (2, 1)
(3) (2, 2) (4) (1, 1) (स)

6. एक रेखिक समीकरण की घात होती है -

- (1) 0 (2) 2
(3) 1 (4) कोई नहीं (स)

7. दो रेखिक समीकरणों के आलेख प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं, तब रेखिक समीकरण युग्म का -

- (1) कोई हल नहीं (2) अद्वितीय हल है
(3) दो हल हैं (4) अनेक हल हैं। (ब)

8. दो रेखिक समीकरणों के आलेख समान्तर रेखाएँ हैं तब रेखिक समीकरण युग्म का -

- (1) कोई हल नहीं (2) अद्वितीय हल है
(3) दो हल हैं (4) अनेक हल हैं (अ)

9. युगपत समीकरण $2x+3y = 5, 4x+6y = 9$ निकाय है-

- (1) संगत (2) असंगत
(3) अ व ब दोनों (4) इनमें से कोई नहीं (ब)

10. समीकरण $x + 2y = 9$ में यदि $x = 5$ हो तो y का मान क्या होगा -

- (1) 1 (2) 2
(3) 4 (4) -2 (ब)

11. समीकरण $4x + 2y = K$ में यदि $x = 2, y = 1$ हो तो k का मान होगा-

- (1) 6 (2) 10
(3) 7 (4) 8 (ब)

अतिलघुतरात्मक प्रश्न

1. 9 पेंसिल तथा 8 पेन का मूल्य 54 रु. है। इसे बीजगणितीय समीकरण रूप में लिखिए।

हल. माना एक पेंसिल का मूल्य रु. x व एक पेन का मूल्य रु. y

है। अतः $9x + 8y = 54$

2. एक क्रिकेट टीम के कोच ने 7 बल्ले तथा 6 गेंदे 3800 रु. में खरीदी। बाद में उसने 3 बल्ले और 5 गेंदे 1750 रु. में खरीदी। इस समस्या को रेखिक समीकरणों के युग्म द्वारा प्रदर्शित कीजिए -

हल. माना एक बल्ले का मूल्य रु. x व एक गेंद का मूल्य रु. y है।

$$\text{अतः प्रश्नानुसार } 7x + 6y = 3800 \dots\dots\dots(1)$$

$$3x + 5y = 1750 \dots\dots\dots(2)$$

3. k किस मान के लिए समीकरण निकाय $3x-2y = 0$ तथा $kx + 5y = 0$ के अन्नत हल होंगे?

हल. समीकरण निकाय के अन्नत हल होंगे यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$$a_1 = 3, b_1 = -2, c_1 = 0$$

$$a_2 = k, b_2 = 5, c_2 = 0$$

$$\therefore \frac{3}{k} = \frac{-2}{5}$$

$$-2k = 15$$

$$\therefore k = \frac{-15}{2}$$

4. एक संख्या का तीन गुना और दूसरी संख्या के दो गुने का अन्तर 9 है, इसको बीजगणितीय रूप में लिखिए।

हल. माना पहली संख्या = x

$$\text{दूसरी संख्या} = y$$

$$\text{अतः प्रश्नानुसार } 3x - 2y = 9$$

5. समीकरण युग्म को हल कीजिए -

$$x + y = 14, \quad x - y = 4$$

हल. $x + y = 14 \dots\dots\dots(1)$

$$x - y = 4 \dots\dots\dots(2)$$

समी. (1) व (2) को जोड़ने पर

$$x + y = 14$$

$$x - y = 4$$

$$\hline 2x = 18$$

$$x = \frac{18}{2} = 9$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$9 + y = 14$$

$$y = 14 - 9 = 5$$

अतः $x = 9, y = 5$ अ

6. निम्न समीकरण निकाय के हलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए-

$$2x + 4y = 7, \quad 3x + 6y = 8$$

हल. $a_1 = 2, \quad b_1 = 4, \quad c_1 = 7$

$$a_2 = 3, \quad b_2 = 6, \quad c_2 = 8$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{7}{8}$$

$$\text{अतः } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

∴ समीकरण निकाय का कोई हल नहीं होगा।

समान्तर रेखाएँ प्राप्त होगी। (असंगत)

7. दो चरो वाले रैखिक समीकरण युग्म का मानक रूप लिखिए।

हल. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

8. क्या बिन्दु (2, 3) रेखा $3x - 2y = 5$ पर स्थित है?

हल. सभी $3x - 2y = 5$

$$x = 2, y = 3 \text{ रखने पर}$$

$$3 \times 2 - 2 \times 3 = 5$$

$$6 - 6 = 5$$

$0 \neq 5$ अतः बिन्दु (2, 3) रेखा पर स्थित नहीं है।

लघुत्तरात्मक प्रश्न -

1. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए -

$$s - t = 3, \quad \frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$$

हल. दिये गये समीकरण युग्म

$$s - t = 3 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{तथा } \frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$$

$$\frac{2s + 3t}{6} = \frac{6}{1}$$

वज्र गुणा करने पर

$$2s + 3t = 36 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{समी. (1) से } s = 3 + t \dots\dots\dots (3)$$

समी. (3) से s का मान समीकरण (2) प्रतिस्थापित करने पर

$$2(3 + t) + 3t = 36$$

$$6 + 2t + 3t = 36$$

$$6 + 5t = 36$$

$$\text{या } 5t = 36 - 6$$

$$\text{या } 5t = 30$$

$$t = \frac{30}{5} = 6$$

t का मान समी. (1) में रखने पर

$$s - 6 = 3$$

$$s = 3 + 6 = 9$$

$$\therefore s = 9, t = 6$$

2. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को विलोपन विधि से हल कीजिए -

$$x + y = 5 \text{ व } 2x - 3y = 4$$

हल. दिये गये समीकरण -

$$x + y = 5 \dots\dots\dots (1)$$

$$2x - 3y = 4 \dots\dots\dots (2)$$

समी. (1) को 2 से गुणा करने पर

$$2x + 2y = 10 \dots\dots\dots (3)$$

समी. (3) में से समी. (2) को घटाने पर

$$2x + 2y = 10$$

$$-2x - 3y = 4$$

$$5y = 6$$

$$y = \frac{6}{5}$$

y का मान समी. (1) में रखने पर -

$$x + \frac{6}{5} = 5$$

$$x = 5 - \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{25 - 6}{5} = \frac{19}{5}$$

$$\therefore x = \frac{19}{5} \text{ व } y = \frac{6}{5}$$

3. दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हे ज्ञात कीजिए।

हल. माना दो संख्याएँ x व y हैं।

प्रश्नानुसार $x - y = 26$ (1)

पुनः प्रश्नानुसार $x = 3y$ (2)

समी. (2) से x का मान समी. (1) में रखने पर

$$3y - y = 26$$

$$2y = 26$$

$$y = \frac{26}{2}$$

$$\therefore y = 13$$

y का मान समी. (2) में रखने पर

$$x = 3 \times 13 = 39$$

अतः दो संख्याएँ 39 व 13 हैं।

4. दो सम्पूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18 डिग्री अधिक है। उन्हे ज्ञात कीजिए।

हल. माना दो सम्पूरक कोण x° व y° हैं तथा $x^\circ > y^\circ$

प्रश्नानुसार $x + y = 180^\circ$ (1) (सम्पूरक कोणों का योग 180° होता है।)

पुनः प्रश्नानुसार $x = y + 18^\circ$ (2)

समी. (2)से x का मान समी. (1)में रखने पर -

$$y + 18^\circ + y = 180^\circ$$

$$2y + 18^\circ = 180^\circ$$

$$2y = 180^\circ - 18^\circ$$

$$2y = 162^\circ$$

$$y = \frac{162}{2} = 81^\circ$$

y का मान समी. (2)में रखने पर

$$x = 81^\circ + 18^\circ = 99^\circ$$

\therefore कोण $99^\circ, 81^\circ$

5. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय विधि से हल कीजिए -

$$2x + y - 6 = 0 ; 4x - 2y - 4 = 0$$

हल. $2x + y - 6 = 0$ (1)

$4x - 2y - 4 = 0$ (2)

समी. (1) से $y = 6 - 2x$ (3)

समी. (3) में $x = 0$ रखने पर $y = 6 - 2 \times 0 = 6 - 0 = 6$

समी. (3) में $x = 1$ रखने पर $y = 6 - 2 \times 1 = 6 - 2 = 4$

समी. (3) में $x = 2$ रखने पर $y = 6 - 2 \times 2 = 6 - 4 = 2$

सारणी - I

x	0	1	2
y	6	4	2

समी. (2) से $2y = 4x - 4$

$$y = \frac{4x - 4}{2} = 2x - 2$$
 (4)

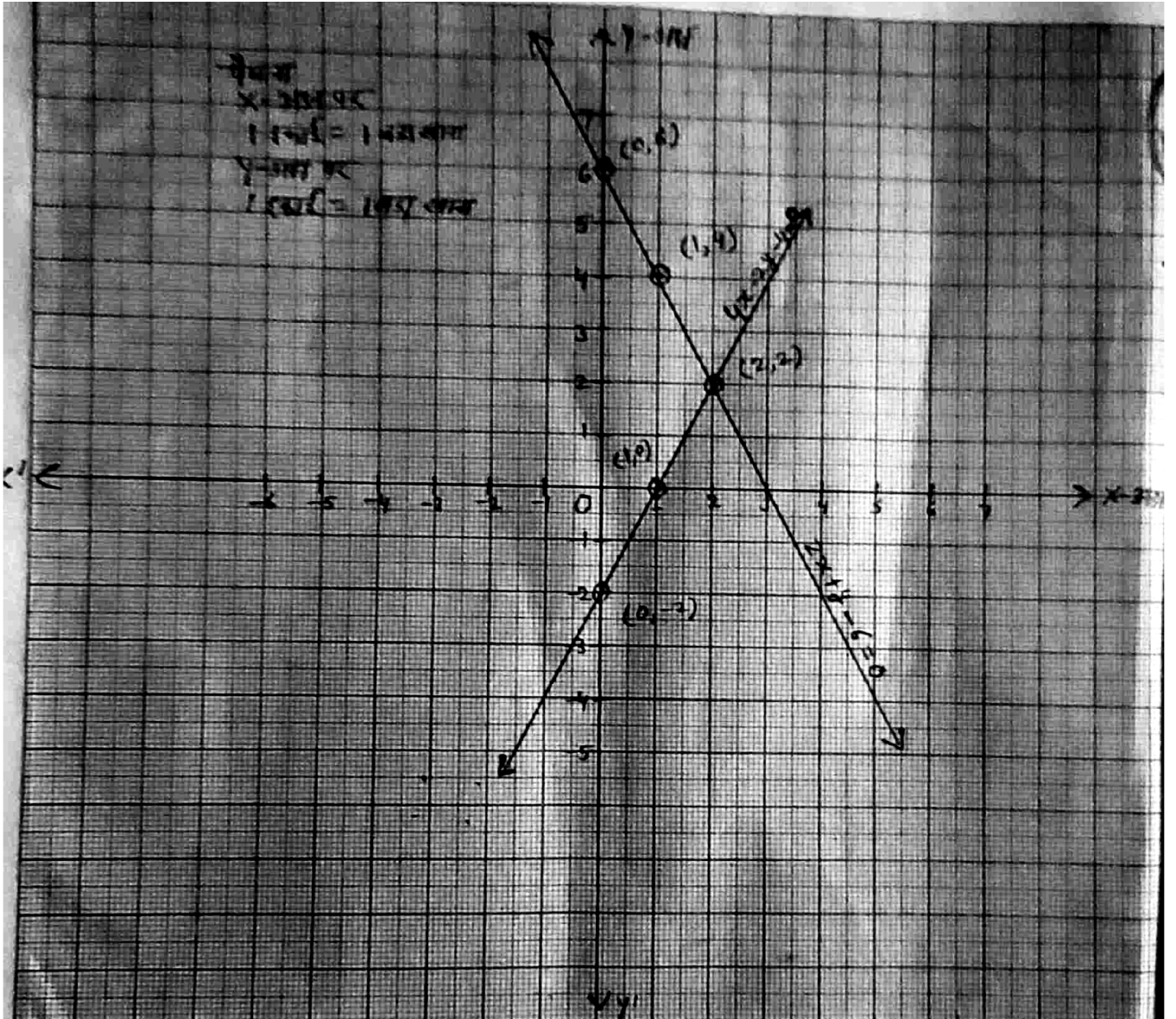
समी. (4) में $x = 1$ रखने पर $y = 2 \times 1 - 2 = 2 - 2 = 0$

समी. (4) में $x = 2$ रखने पर $y = 2 \times 2 - 2 = 4 - 2 = 2$

समी. (4) में $x = 0$ रखने पर $y = 2 \times 0 - 2 = 0 - 2 = -2$

सारणी - II

x	1	2	0
y	0	2	-2



अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

1. एक आयताकार बाग, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई से 4 मी. अधिक है, का अर्द्धपरिमाप 36 मी. है। बाग की विभाएँ ज्ञात कीजिए।
2. पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जायेगी। नूरी और सोनू की आयु कितनी है।



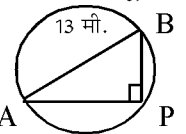
अध्याय

4

द्विघात समीकरण

अंक 4 (1) द्विघात समीकरण में से 4 अंक का एक निबन्धात्मक प्रश्न पूछा जायेगा।

- ❖ चर x में एक द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के प्रकार का होता है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$
- ❖ एक वास्तविक संख्या α द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल कहलाती है यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो।
- ❖ श्रीधराचार्य सूत्र - द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल श्रीधराचार्य सूत्र से $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- चर के दो मान $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ प्राप्त होते हैं।
- ❖ द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति b^2-4ac पर निर्भर करती है।
- ❖ b^2-4ac यह निश्चित करता है कि द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल वास्तविक हैं अथवा नहीं। इसे द्विघात समीकरण का विविक्तकर कहते हैं।
- ❖ द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के
- (i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं यदि $b^2-4ac > 0$ हो
- (ii) दो बराबर वास्तविक मूल होते हैं यदि $b^2-4ac = 0$ हो,
- (iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होता, यदि $b^2-4ac < 0$ हो
- Ex-1** द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 5 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।
- हल. द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 5 = 0$ में
- $a = 2, b = -3, c = 5$
- विविक्तकर = $b^2 - 4ac$
- $= (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5$
- $= 9 - 40 = -31 < 0$
- $\therefore b^2-4ac < 0$
- अतः दिये गये समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है।
- ❖ यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल α व दूसरा β हो तो।
- (i) मूलों का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = -\frac{(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$
- (ii) मूलों का गुणनफल $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$
- ❖ द्विघात समीकरण बनाना जब मूलों का योग व गुणनफल दिया जाये -
- $x^2 - (\text{मूलों का योग})x + \text{मूलों का गुणनफल} = 0$
- $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$
1. दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है। पूर्णांकों को ज्ञात कीजिए।
- हल. माना दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक x व $x + 1$ हैं।
- अतः प्रश्नानुसार $x \times (x + 1) = 306$
- $\Rightarrow x^2 + x = 306$
- $\Rightarrow x^2 + x - 306 = 0$
- $x^2 + 18x - 17x - 306 = 0$
- $x(x + 18) - 17(x + 18) = 0$
- $(x + 18)(x - 17) = 0$
- अतः $x + 18 = 0$ $x = -18$ (ऋणात्मक पूर्णांक)
- या $x - 17 = 0$ $x = 17$
- \therefore दो धनात्मक पूर्णांक $x = 17$
- व $x + 1 = 17 + 1 = 18$ है।
2. 13 मीटर व्यास वाले एक वृताकार पार्क की परिसेमा के एक बिन्दु पर एक खम्भा इस प्रकार गाड़ना है कि इस पार्क के एक व्यास के दोनो अंत बिन्दुओं पर बने फाटको A और B से खम्भे की दूरियों का अंतर 7 मीटर हो। क्या करना संभव है? यदि है तो दोनों फाटकों से कितनी दूरियाँ पर खम्भा गाड़ना है?
- हल. AB वृत्त का व्यास है।
- जिसके सिरो A व B पर फाटक बने हैं।



खम्भे की स्थिति बिन्दु P पर है।

AB=13 मी.

माना खम्भे P की फाटक B से दूरी BP = x मी.

प्रश्नानुसार AP-BP = 7 मी.

∴ AP = 7 + BP = (7 + x) मी.

AB व्यास है।

∴ ∠APB = 90° (अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।)

∴ ΔAPB में पाइथोगोरस प्रमेय से -

$$AP^2 + BP^2 = AB^2$$

$$(7 + x)^2 + x^2 = (13)^2$$

$$\Rightarrow 49 + 14x + x^2 + x^2 = 169$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 14x + 49 = 169$$

$$\text{या } 2x^2 + 14x + 49 - 169 = 0$$

$$2x^2 + 14x - 120 = 0$$

$$\text{या } x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$\text{विविक्तकर} = b^2 - 4ac$$

$$= (7)^2 - 4 \times 1 \times (-60)$$

$$= 49 + 240$$

$$= 289 > 0$$

∴ द्विघात समीकरण के दो वास्तविक मूल हैं। अतः खम्भे को पार्क की परिसीमा पर गाड़ा जा सकता सम्भव है।

द्विघात समी. $x^2 + 7x - 60 = 0$

$$x^2 + 12x - 5x - 60 = 0$$

$$x(x + 12) - 5(x + 12) = 0$$

$$\therefore (x - 5)(x + 12) = 0$$

$$\text{अतः } x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$x + 12 = 0 \Rightarrow x = -12 \text{ (ऋणात्मक)}$$

∴ x खम्भे व फाटक B के मध्य दूरी है, जो

धनात्मक है।

अतः x = 5 मी.

∴ खम्भे की फाटक B से दूरी BP = 5 मी.

खम्भे की फाटक A से दूरी AP = 7 + x = 7 + 5 = 12 मी.

3. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हो।

हल. माना पहली संख्या = x

∴ दूसरी संख्या = 27 - x

प्रश्नानुसार $x \times (27 - x) = 182$

$$\Rightarrow 27x - x^2 = 182$$

$$\Rightarrow -x^2 + 27x - 182 = 0$$

$$\text{या } x^2 - 27x + 182 = 0$$

$$\text{या } x^2 - 13x - 14x + 182 = 0$$

$$x(x - 13) - 14(x - 13) = 0$$

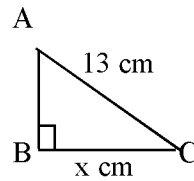
$$\therefore (x - 13)(x - 14) = 0$$

$$\text{अतः } x - 13 = 0 \Rightarrow x = 13$$

$$\text{या } x - 14 = 0 \Rightarrow x = 14$$

अतः दो धनात्मक पूर्णांक 13 और 14 या 14 और 13 हैं।

4. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 सेमी. कम है। यदि कर्ण 13 सेमी. है, तो अन्य दो भूजाएँ ज्ञात कीजिए।



हल. माना समकोण त्रिभुज का आधार BC = x सेमी.

अतः समकोण त्रिभुज की ऊँचाई AB = (x - 7) सेमी.

कर्ण AC = 13 सेमी.

समकोण ΔABC में पाइथोगोरस प्रमेय से -

$$\text{कर्ण}^2 = \text{आधार}^2 + \text{लम्ब}^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$\Rightarrow (13)^2 = x^2 + (x - 7)^2$$

$$\Rightarrow 169 = x^2 + x^2 - 14x + 49$$

$$\Rightarrow 169 = 2x^2 - 14x + 49$$

$$\text{या } 2x^2 - 14x + 49 - 169 = 0$$

$$2x^2 - 14x - 120 = 0$$

$$x^2 - 7x - 60 = 0$$

$$x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$$

$$x - 12 + 5(x - 12) = 0$$

$$\therefore (x - 12)(x + 5) = 0$$

$$x - 12 = 0 \quad x = 12$$

या $x + 5 = 0 \quad x = -5$ (भुजा की लम्बाई ऋणात्मक नहीं होती)

∴ समकोण त्रिभुज का आधार BC = 12 सेमी.

ऊँचाई AB = 12 - 7 = 5 सेमी.

5. द्विघात समीकरण $2x^2 + kx + 3 = 0$ में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि द्विघात समीकरण के दोनों मूल बराबर

हो।

6. द्विघात समी. $2x^2 - 6x + 3 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।
7. दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 365 हो।
8. क्या परिमाण 80 मी. तथा क्षेत्रफल 400 मी.² के एक पार्क को बनाना सम्भव है? यदि है तो उसकी लम्बाई व चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
9. एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ खिलौने निर्मित करता है, प्रत्येक खिलौने का मूल्य (रुपयों में) 55 में से एक दिन में निर्माण किये गये खिलौने की संख्या को घटाने से प्राप्त संख्या के बराबर है। उस दिन निर्माण किये गये खिलौने की संख्या ज्ञात कीजिए।
10. निम्न द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए -
 - (i) $6x^2 - x - 2 = 0$
 - (ii) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$





©SHEKHAWAT
MISSION100

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें।

अध्याय

5

समान्तर श्रेणी (A.P.)

2 वस्तुनिष्ठ + 1 रिक्त स्थान + 1 दीर्घउत्तरात्मक = 4 प्रश्न, अंक (प्रश्न) 1 (2) + 1 (1) + 3 (1) = 6 (4)

- ❖ समान्तर श्रेणी संख्याओं का एक ऐसा क्रम है जिसमें पहला पद दिया है तथा प्रत्येक पद अपने से ठीक पहले पद में एक अचर संख्या d जोड़ने पर प्राप्त होता है।
- ❖ d को सार्वअन्तर कहते हैं जो धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।
- ❖ यदि AP का पहला पद a सार्वअन्तर d हो तो AP का व्यापक रूप = $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$ जहाँ पहला पद $a_1 = a$, दूसरा $a_2 = a + d$, $a_3 = a + 2d$ इसी प्रकार n वां पद $a_n = a + (n-1)d$
- ❖ यदि AP परिमित हो तथा अन्तिम पद l हो तो अन्त से n वां पद = $l - (n-1)d$
- ❖ यदि AP का अन्तिम पद नहीं दिया हो तो n पदों की AP में अन्त से m वां पद = शुरू से $(n - m + 1)$ वां पद
- ❖ AP के n पदों का योगफल $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$
- ❖ यदि AP का अन्तिम पद l दिया हो तो $S_n = \frac{n}{2} [a + l]$
- ❖ यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हो तो $2b = a + c$
- Ex.1 AP : 5, 8, 11, का प्रथम पद व सार्वअन्तर होगा।
हल. प्रथम पद $a = 5$, सार्वअन्तर $d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3$
- Ex.2 AP के प्रथम चार पद लिखिए जबकि प्रथम पद 10 और सार्वअन्तर 10 से।
हल. $a = 10, d = 10$
पहला पद $a_1 = a = 10$
दूसरा पद $a_2 = a + d = 10 + 10 = 20$
तीसरा पद $a_3 = a + 2d = 10 + 2 \times 10 = 30$
चौथा पद $a_4 = a + 3d = 10 + 3 \times 10 = 40$
- Ex.3 AP : 3, 8, 13 253 में अन्तिम पद से 20 वां पद ज्ञात करो
हल. $a = 3, d = 8 - 3 = 5$ अन्तिम पद $l = 253$
अन्त में n वां पद = $l - (n-1)d$
अतः अन्त से 20 वां पद = $253 - (20 - 1) \times 5$
 $= 253 - 95$
 $= 158$
- वस्तुनिष्ठ प्रश्न
1. 1 AP : 10, 7, 4, का 30 वां पद है।
(1) 97 (2) 77
(3) -77 (4) - 87 (3)
- हल. $a = 10, d = 7 - 10 = -3, n = 30$
 $a_n = a + (n - 1)d$
 $a_{30} = 10 + (30 - 1)(-3) = 10 - 87 = - 77$
2. AP : 7, 13, 19, 205 में पदों की संख्या होगी-
(1) 34 (2) 35
(3) 33 (4) 36 (1)
- हल. $a = 7, d = 13 - 7 = 6, a_n = 205$
 $a + (n - 1) d = a_n$
 $7 + (n - 1) 6 = 205$
 $(n - 1) 6 = 198$
 $n = 34$
3. यदि 10, m , - 2 समान्तर श्रेणी में हो तो m का मान होगा-
(1) 4 (2) 3
(3) 2 (4) 1 (1)
- हल. a, b, c , AP में हो तो $2b = a + c$
 $2m = 10 - 2$
 $m = 4$
4. AP: 3, 8, 13, 18, का कौनसा पद 78 है-
(1) 14 (2) 10
(3) 16 (4) 20 (3)
5. AP : - 7, -9, -11, - 13 प्रथम पद व सार्वअन्तर क्रमशः होगा-
(1) +7, -2 (2) -7, -2
(3) -7, 16 (4) -2, -7 (2)
6. AP का प्रथम पद 2 व सार्वअन्तर 3 हो तो n वां पद होगा-
(1) $(2n - 1)$ (2) $(2n + 1)$

- (3) $(3n - 1)$ (4) $(3n + 1)$ (3)
7. एक AP का प्रथम पद व अन्तिम पद क्रमशः 2 व 8 हैं, n पदों का योग 90 है तो n का मान होगा -
 (1) 13 (2) 14
 (3) 15 (4) 18 (4)
8. AP: 2, 7, 12, के 10 पदों का योग होगा -
 (1) 247 (2) 245
 (3) 145 (4) 265 (2)
9. समान्तर श्रेणी में $a = 7$ तथा $a_{13} = 35$ हो तो सार्वअन्तर d का मान होगा -
 (1) $\frac{7}{3}$ (2) $\frac{3}{7}$
 (3) $\frac{7}{4}$ (4) $\frac{4}{7}$ (1)
10. यदि AP में $l = 28$, $s = 144$ तथा $n = 9$ हो तो a मान है-
 (1) 2 (2) 3
 (3) 4 (4) 6 (3)
11. दो समान्तर श्रेणियों का सर्वाअन्तर समान है। उनमें से एक पहला पद 8 है और दूसरे का 3 है। उनके 30 वें पदों के बीच का अन्तर है -
 (1) 5 (2) 8
 (3) 11 (4) 13 (1)
12. यदि AP का n वां पद $a_n = 9 - 5n$ है तो सार्वअन्तर होगा-
 (1) 5 (2) - 5
 (3) 4 (4) - 4 (2)
13. 3 के प्रथम पाँच गुणजों का योगफल है-
 (1) 55 (2) 65
 (3) 75 (4) 45 (4)

रिक्त स्थान

1. एक AP में $a = -18$, $n = 10$, $a_n = 0$ हो तो $d = \dots\dots$ है।
 हल- $a + (n - 1) d = a_n$
 $- 18 + (10-1) d = 0$
 $9 d = 18$
 $d = 2$

2. किसी AP के व्यापक पद का सूत्र है।
 हल- $a_n = a + (n - 1)d$
3. AP : 3,-2,-7,-12..... का प्रथम पद व सर्वाअन्तर है।
 हल- 3, -5
4. एक परिमित AP का अन्तिम पद l हो तो सभी पदों का योग सूत्र से प्राप्त होता है।
 हल- $s_n = \frac{n}{2}[a + l]$
5. प्रथम 200 धन पूर्णाकों का योगफल..... होता है।
 हल- 20100
6. 2 के प्रथम पाँच गुणजों का योग होता है।
 हल- 30
7. $\square, 13, \square, 3$ समान्तर श्रेणी में है।
 हल- 18, 8
8. AP : 3, 5, 7, 9, 201 का अन्तिम से 5 वां पद होगा।
 हल- 193

दीर्घउत्तरीय प्रश्न

1. उस AP का 31 वां पद ज्ञात करें जिसका 11 वां पद 38 व 16 वां पद 73 है।
 हल- मना AP का पहला पद a व सार्वअन्तर d है।
 दिया है - $a_{11} = 38$
 $a + (11 - 1)d = 38$
 $a + 10d = 38 \dots\dots\dots (1)$
 तथा $a_{16} = 73$
 $a + 15d = 73 \dots\dots\dots (2)$
 समीकरण (2) में से (1)को घटाने पर
 $a + 15d = 73$
 $\underline{- a + 10d = 38}$
 $\hline 5d = 35$
 $d = 7$
 d का मान समीकरण (1) में रखने पर
 $a + 10 \times 7 = 38$
 $a = 38 - 70 = - 32$
 अतः $a_{31} = a + 30d$
 $= -32 + 30 \times 7$
 $= -32 + 210$

$$= 178$$

2. तीन अंको वाली कितनी संख्याएं 7 से विभाज्य है?

हल. 7 से विभाज्य तीन अंको वाली संख्याओं की AP : 105, 112, 119, 994

$$a = 105, d = 112 - 105 = 7, a_n = 994$$

$$\text{सूत्र } a + (n - 1) d = a_n$$

$$105 + (n - 1) 7 = 994$$

$$(n - 1) 7 = 994 - 105$$

$$n - 1 = \frac{889}{7}$$

$$n = 127 + 1$$

$$n = 128$$

अतः तीन अंको वाली 128 संख्याएं 7 से विभाज्य है।

3. किसी AP का प्रथम पद 5, अन्तिम पद 45 और योग 400 है। पदों की संख्या और सार्वअन्तर ज्ञात करो।

हल. दिया है $a = 5, l = a_n = 45$ तथा $s_n = 400$

$$s_n = 400$$

$$\frac{n}{2}[a + l] = 400$$

$$\frac{n}{2}[5 + 45] = 400$$

$$\frac{n}{2} \times 50 = 400$$

$$n = \frac{400}{25} = 16$$

$$\text{तथा } a + (n - 1) d = a_n$$

$$5 + (16 - 1) d = 45$$

$$15d = 45 - 5$$

$$d = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

$$\text{अतः } n = 16 \text{ व } d = \frac{8}{3}$$

4. यदि समान्तर श्रेणी के तीसरे व नौवें पद का क्रमशः 4 और -8 है तो इसका कौनसा पद शून्य होगा।
5. किसी AP के चौथे और 8 वें पदों का योग 24 है तथा छठे और 10 वें पदों का योग 44 है। इस AP के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।
6. उस AP के प्रथम 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसके दूसरे और तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 हैं।
7. ऐसे प्रथम 40 धन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए जो 6 से विभाज्य है।
8. उस AP ने प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसमें $d = 7$ और 22 वां पद 149 है।



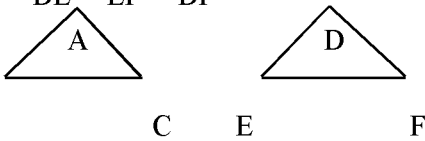
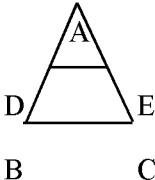
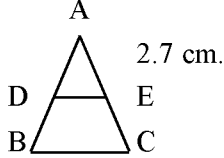
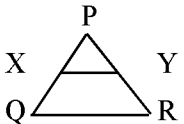
शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें।

अध्याय

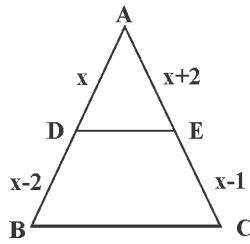
6

त्रिभुज

1 वस्तुनिष्ठ + 1 अतिलघुतरात्मक + 1 लघुतरात्मक = 3 प्रश्न, अंक (प्रश्न) 1(1) + 1(1) + 2(1) = 4(3)(3)

- ❖ समरूप आकृतियाँ - वे सभी आकृतियाँ जिनके आकार समान होते हैं परन्तु माप समान होना आवश्यक नहीं है।
- ❖ समरूप बहुभुज - दो बहुभुज समरूप कहलाते हैं यदि उनके संगत कोण बराबर हो और उसकी संगत भुजाएँ समानुपातिक हो।
- ❖ सभी वृत्त वर्ग, समबाहु त्रिभुज समरूप होते हैं।
- ❖ दो समान कोणिक त्रिभुजों में उनकी संगत भुजाओं का अनुपात सदैव समान रहता है।
- ❖ $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ में
 $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$
 तथा $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ हो तो $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
- 
- ❖ आधारभूत आनुपातिक प्रमेय या थैल्स प्रमेय :-
 $\triangle ABC$ में यदि $DE \parallel BC$ हो तो $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$
- 
- इसका विलोम भी सत्य है।
- ❖ त्रिभुजों की समरूपता के लिए कसौटियाँ -
1. AAA या AA (कोण-कोण-कोण)
 2. SSS (भुजा-भुजा-भुजा)
 3. SAS (भुजा-कोण-भुजा)
1. दो बहुभुज समरूप होंगे यदि -
 - (1) संगत कोण समान हो (2) संगत भुजाएँ समानुपाती हो
 - (3) दोनों ही (1) व (2)
 - (4) संगत कोण असमान हो (3)
 2. निम्न में से समरूपता की कसौटी नहीं है (त्रिभुजों के लिए)
 - (1) AAA
 - (2) SSS
 - (3) ASS
 - (4) SAS (3)
3. $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है तो सत्य कथन है -
 - (1) $\angle B = \angle R$
 - (2) $\angle C = \angle Q$
 - (3) $\angle A = \angle R$
 - (4) $\angle B = \angle Q$ (4)
 4. किस प्रकार के त्रिभुज सदैव समरूप होंगे -
 - (1) विषमबाहु
 - (2) समबाहु
 - (3) समद्विबाहु
 - (4) समकोण (2)
 5. संलग्न आकृति में $DE \parallel BC$ है। यदि $\frac{AB}{DB} = \frac{3}{2}$ तथा $AE = 2.7$ सेमी. है तो EC कहलाता है-
 
 - (1) 2 सेमी.
 - (2) 1.8 सेमी.
 - (3) 4 सेमी.
 - (4) 2.7 सेमी. (2)
 6. $\triangle PQR$ व $\triangle DEF$ में $\angle D = \angle Q$ और $\angle R = \angle E$ तो निम्न में कौन सत्य है?
 - (1) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$
 - (2) $\frac{DF}{PQ} = \frac{EF}{RP}$
 - (3) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$
 - (4) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$ (3)
 7. दी गई आकृति में $XY \parallel QR$, $\frac{PQ}{XQ} = \frac{7}{3}$ तथा $PR = 6.3$ सेमी. है तो YR बराबर है-
 
 - (1) 2.7 सेमी.
 - (2) 8.9 सेमी.
 - (3) 2.1 सेमी.
 - (4) 0.9 सेमी. (1)
 8. चित्र में $DE \parallel BC$, $AD = x$, $DB = x - 2$, $AE = x + 2$ तथा $EC = x - 1$ हो तो x का मान होगा।

हल. ΔABC में $DE \parallel BC$



$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$x(x-1) = (x-2)(x+2)$$

$$x^2 - x = x^2 - 4$$

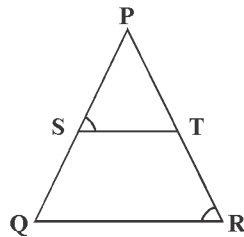
$$x = 4$$

9. त्रिभुजों की समरूपता के प्रतिबन्ध लिखिए?

- हल. (अ) संगत कोण बराबर हो।
(ब) संगत भुजाएँ समानुपाती हो

10. आकृति में $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ है तथा $\angle PST = \angle PRQ$ है।

सिद्ध करो कि ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल. दिया है $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

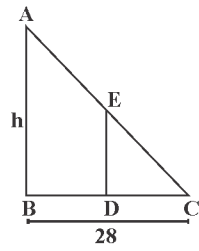
- $\Rightarrow ST \parallel QR$ (थेल्स प्रमेय के विलोम से)
 $\Rightarrow \angle PST = \angle PQR$ (संगत कोण)..... (1)
दिया है $\angle PST = \angle PRQ$ (2)
समीकरण (1) व (2) से $\angle PQR = \angle PRQ$
 $\Rightarrow PQ = PR$ (समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ)
अतः PQR समद्विबाहु त्रिभुज है।

11. लम्बाई 6 मी. वाले एक ऊर्ध्वाधर स्तंभ की भूमि पर छाया की लम्बाई 4 मी. है जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28 मी. है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।

हल. माना मीनार की ऊँचाई = h मी.

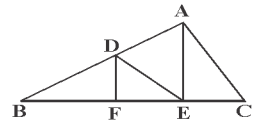
$$\frac{h}{6} = \frac{28}{4}$$

$$\Rightarrow h = \frac{28}{4} \times 6 = 42 \text{ मीटर}$$



12. आकृति में $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ है। सिद्ध करो

कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है



हल. ΔBCA में, $DE \parallel AC$ (दिया है)

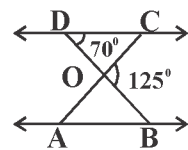
$$\Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{BD}{DA} \dots\dots\dots (1)$$

पुनः ΔBEA में, $DF \parallel AE$ (दिया है)

$$\Rightarrow \frac{BF}{FE} = \frac{BD}{DA} \dots\dots\dots (2)$$

समीकरण (1) व (2)से $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$

13. निम्न आकृति में $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ और $\angle CDO = 70^\circ$ है तो $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात करें



हल. DOB एक सरल रेखा है।

$$\Rightarrow \angle DOC + 125^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 180^\circ - 125^\circ$$

$$= 55^\circ$$

$$\Delta DCO \text{ में } \angle DCO + 70^\circ + 55^\circ = 180^\circ$$

$$\angle DCO = 180^\circ - 125^\circ$$

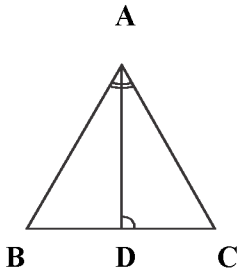
$$= 55^\circ$$

दिया है $\Delta ODC \sim \Delta OBA$

$$\Rightarrow \angle DCO = \angle BAO \text{ (संगत कोण)}$$

$$\Rightarrow \angle BAO = 55^\circ$$

14. एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है। दर्शाइए कि $CA^2 = CB \cdot CD$ है।



- हल. दिया है $\triangle ABC$ में भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार है कि $\angle ADC = \angle BAC$

$$\text{सिद्ध करना } CA^2 = CB \cdot CD$$

उपपत्ति : $\triangle ABC$ व $\triangle DAC$ में

$$\angle C = \angle C \text{ (उभयनिष्ठ कोण)}$$

$$\angle BAC = \angle ADC \text{ (दिया है)}$$

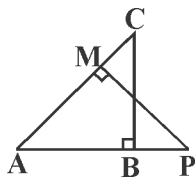
$$\therefore \text{A.A समरूपता से } \triangle ABC \sim \triangle DAC$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow AC^2 = BC \cdot DC$$

$$\Rightarrow CA^2 = CB \cdot CD$$

15. आकृति में ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके कोण B और M समकोण हैं। सिद्ध करो कि $\triangle ABC \sim \triangle AMP$



- हल. दिया है $\triangle ABC$ व $\triangle AMP$ दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके कोण B व M समकोण हैं।

$$\text{सिद्ध करना } \triangle ABC \sim \triangle AMP$$

उपपत्ति $\triangle ABC$ व $\triangle AMP$ में

$$\angle A = \angle A \text{ (उभयनिष्ठ कोण)}$$

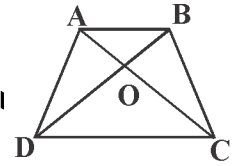
$$\angle B = \angle M \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\therefore \text{A.A समरूपता से } \triangle ABC \sim \triangle AMP$$

16. समलम्ब चतुर्भुज ABCD, जिसमें $AB \parallel DC$ है, के

विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए

$$\text{दर्शाइए कि } \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \text{ है।}$$



- हल. दिया है ABCD एक समलम्ब है जिसमें $AB \parallel CD$ तथा विकर्ण AC व BD बिन्दु O पर काटते हैं।

$$\text{सिद्ध करना है - } \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

उपपत्ति - $AB \parallel CD$ और AC तिर्यक रेखा है।

$$\angle OAB = \angle OCD \text{ (एकान्तर कोण)}$$

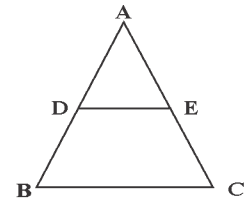
$$\angle AOB = \angle COD \text{ (शीर्षाभिमुख कोण)}$$

$$\therefore \text{AA समरूपता से } \triangle AOB \sim \triangle COD$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

17. आकृति में $\triangle ABC$ में $BC \parallel DE$ हो तो सिद्ध करो कि

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



- हल. $\triangle ABC$ में $BC \parallel DE$ है तो

$$\text{आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय से } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{या } \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

$$\text{या } \frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$$

$$\text{या } \frac{DB + AD}{AD} = \frac{EC + AE}{AE}$$

$$\text{या } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

अध्याय

7

निर्देशांक ज्यामिति

अंकभार = 7, वस्तुनिष्ठ - 1 (1 अंक), अतिलघुतरात्मक - 1 (1 अंक)
लघुतरात्मक - 1 (2 अंक), दीर्घउत्तरात्मक - 1 (3 अंक)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

- मूल बिन्दु के निर्देशांक होते हैं?
(1) (1, 1) (2) (0, 0)
(3) (1, 0) (4) (2, 2) (2)
- निर्देशांक (-1, 1) में भुज और कोटि का मान क्रमशः है?
(1) भुज=-1, कोटी = 1 (2) भुज=1, कोटि=-1
(3) भुजा=1, कोटी=0 (4) भुज=0, कोटि=-1 (1)
- यदि बिन्दु (K, 2) तथा (3, 4) के बीच की दूरी $\sqrt{8}$ हो तो k का मान होगा?
(1) k = 5, 1 (2) k = -5, 1
(3) k = -1, -5 (4) k = -1, 5 (1)
- बिन्दु (5,-2) की y - अक्ष से दुरी है?
(1) -2 (2) 5
(3) 0 (4) इनमें से कोई नहीं (2)
- बिन्दु (-1, 1) कौनसे चतुर्थांश में स्थित है?
(1) प्रथम (2) द्वितीय
(3) तृतीय (4) चतुर्थ (2)
- यदि बिन्दुओं (3, a) और (4, 1) के बीच की दूरी $\sqrt{10}$ हो तो a का मान होगा?
(1) 3, -1 (2) 2, -2
(3) 4, -2 (4) 5, -3 (3)
- X- अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु की कोटि होती है?
(1) 1 (2) -1
(3) 0 (4) इनमेंसे कोई नहीं (3)
- बिन्दु (-x, -y) की मूल बिन्दु से दूरी होगी?
(1) -x (2) -y
(3) x^2+y^2 (4) $\sqrt{x^2+y^2}$ (4)
- यदि बिन्दु Q (0,1), बिन्दुओं P(5, -4) और R (x, 6) का मध्य बिन्दु है तो x का मान कितना होगा?
(1) 5 (2) -5
(3) 4 (4) 6 (2)

- यदि एक वृत्त का केन्द्र (3, 5) है तथा एक व्यास के अंत बिन्दु (4, 7) तथा (2, y) हैं तो y का मान कितना होगा?
(1) 2 (2) 3
(3) 5 (4) 0 (2)
- उस बिन्दु के निर्देशांक जो बिन्दु (-3, 5) का x- अक्ष में प्रक्षेप है, वह है?
(1) (3, 5) (2) (-3, -5)
(3) (3, -5) (4) (-3, 5) (3)
- यदि बिन्दुओं A(4, P) तथा B(1, 0) के बीच की दूरी 5 इकाई है तो P का मान है?
(1) केवल 4 (2) केवल -4
(3) ± 4 (4) 0 (3)
- X- अक्ष पर स्थित बिन्दु P जो बिन्दुओं A (-1, 0) तथा B(5, 0) से समदूरस्थ हैं, वह हैं?
(1) (0, 2) (2) (2, 2)
(3) (2, 0) (4) इनमें से कोई नहीं (3)

अतिलघुतरात्मक प्रश्न

- उस बिन्दु के निर्देशांक लिखिए जो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को $l_1: l_2$ के अनुपात में अतः विभाजित करता है?

हल. $\left(\frac{l_1 x_2 + l_2 x_1}{l_1 + l_2}, \frac{l_1 y_2 + l_2 y_1}{l_1 + l_2} \right)$

- किसी वर्ग के सम्मुख शीर्ष (-5,-4) और (3, 2) है तो इसके विकर्ण की लंबाई लिखिए।

हल. वर्ग के विकर्ण की लंबाई

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
 &= \sqrt{(3+5)^2 + (2+4)^2} \\
 &= \sqrt{8^2 + 6^2} \\
 &= \sqrt{64 + 36} \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

3. यदि बिन्दु P रेखाखण्ड AB का मध्य बिन्दु है तथा A के निर्देशांक (x_1, y_1) तथा B के निर्देशांक (x_2, y_2) है तो बिन्दु P के निर्देशांक होंगे?

हल. मध्य बिन्दु P के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

4. बिन्दुओं A(-1, -2), B(1, 0), C(-1, 2) तथा D(-3, 0) से बनने वाले चतुर्भुज का प्रकार बताइये।

हल.

$$\text{दूरी AB} = \sqrt{(1+1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{दूरी BC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+0)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{दूरी CD} = \sqrt{(-3+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{दूरी AD} = \sqrt{(-1+3)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

अतः चतुर्भुज ABCD एक वर्ग की आकृति है।

लघुतरात्मक प्रश्न

1. यदि Q(0, 1) बिन्दुओं P(5,-3) और R(x, 6) से समदूरस्थ हैं तो x के मान ज्ञात करें?

हल. ∴ बिन्दु Q, P तथा R से समदूरस्थ है

$$\therefore \text{दूरी PQ} = \text{दूरी QR}$$

$$\sqrt{(5-0)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{(0-x)^2 + (1-6)^2}$$

$$\sqrt{25+16} = \sqrt{x^2 + 25}$$

$$41 = x^2 + 25$$

$$\Rightarrow x^2 = 41 - 25$$

$$x = \sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

2. Y- अक्ष पर एक ऐसा बिन्दु ज्ञात करें जो बिन्दुओं A(6,5) और B (-4, 3) से समदूरस्थ है?

हल. माना Y - अक्ष पर बिन्दु P (0,Y) है।

$$\text{अतः दूरी PA} = \text{दूरी PB}$$

$$\sqrt{(6-0)^2 + (5-y)^2} = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-y)^2}$$

$$\sqrt{36+25+y^2-10y} = \sqrt{16+9+y^2-6y}$$

$$61+y^2-10y = 25+y^2-6y$$

$$-10y+6y = -61+25$$

$$-4y = -36$$

$$y = \frac{36}{4} = 9$$

अतः P (0, 9) बिन्दु है।

3. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करें जो बिन्दुओं (4, -3) और (8, 5) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को आंतरिक रूप से 3:1 के अनुपात में विभाजित करता है?

हल. माना वह बिन्दु P(x, y) है

विभाजन सूत्र से,

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$P(x, y) = \left(\frac{3 \times 8 + 1 \times 4}{3+1}, \frac{3 \times 5 + 1 \times -3}{3+1} \right)$$

$$P(x, y) = \left(\frac{24+4}{4}, \frac{15-3}{4} \right)$$

$$P(x, y) = (7, 3)$$

4. यदि बिन्दु A(6,1), B(8,1), C(9,4) और D (P,3) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हों तो P का मान ज्ञात कीजिए।

हल. समांतर चतु. के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं

अतः विकर्ण AC के मध्य विकर्ण BD के मध्य

बिन्दु के निर्देशांक = बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left(\frac{8+P}{2}, \frac{2+3}{2} \right)$$

$$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2} \right) = \left(\frac{8+P}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

दोनों तरफ X- अक्ष की तुलना करने पर,

$$\frac{15}{2} = \frac{8+P}{2}$$

$$15 = 8+P$$

$$\Rightarrow P = 15-8 = 7$$

$$P = 7$$

5. Y का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु P (2,-3) तथा Q (10, y) के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

$$y_1=4, y_2=5$$

हल. दूरी PQ = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$10 = \sqrt{(10 - 2)^2 + (y - (-3))^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$10^2 = 8^2 + (y+3)^2$$

$$100 = 64 + y^2 + 9 + 6y$$

$$y^2 + 6y = 100 - 73$$

$$y^2 + 6y = 27$$

$$y^2 + 6y - 27 = 0$$

$$y(y+9) - 3(y+9) = 0$$

$$(y+9)(y-3) = 0$$

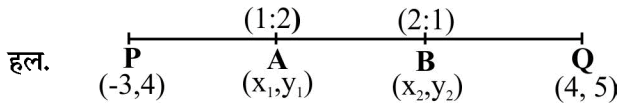
या तो $y + 9 = 0$ या $y - 3 = 0$

$$y = -9, y = 3$$

अतः $y = 3, -9$

दीर्घउत्तरात्मक प्रश्न

1. बिन्दुओं P(-3,4) और Q (4,5) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को समन्वित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।



बिन्दू A के लिए $m_1=1, m_2=2$
 $x_1=-3, x_2=4$
 $y_1=4, y_2=5$

$$A(x_1, y_1) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$A(x_1, y_1) = \left(\frac{1 \times 4 + 2 \times -3}{1 + 2}, \frac{1 \times 5 + 2 \times 4}{1 + 2} \right)$$

$$A(x_1, y_1) = \left(\frac{4 - 6}{3}, \frac{5 + 8}{3} \right)$$

$$A(x_1, y_1) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{13}{3} \right)$$

$$A(x_1, y_1) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{13}{3} \right)$$

बिन्दू B के लिए $m_1=2, m_2=1$
 $x_1=-3, x_2=4$

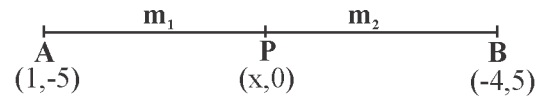
$$B(x_2, y_2) = \left(\frac{2 \times 4 + 1 \times -3}{2 + 1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times 4}{2 + 1} \right)$$

$$B(x_2, y_2) = \left(\frac{8 - 3}{3}, \frac{10 + 4}{3} \right)$$

$$B(x_2, y_2) = \left(\frac{5}{3}, \frac{14}{3} \right)$$

2. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं A(1,-5) और B (-4,5) को मिलाने वाला रेखाखण्ड X- अक्ष से विभाजित होता है तथा इस विभाजन बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल. माना X - अक्ष पर अभीष्ट बिन्दू P(x,0) है।



बिन्दू P के निर्देशांक

$$= \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$(x, 0) = \left(\frac{m_1 \times -4 + m_2 \times 1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 \times 5 + m_2 \times -5}{m_1 + m_2} \right)$$

$$(x, 0) = \left(\frac{-4m_1 + m_2}{m_1 + m_2}, \frac{5m_1 - 5m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

दोनों तरफ Y- अक्ष की तुलना करने पर,

$$\frac{5m_1 - 5m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0}{1}$$

$$5m_1 - 5m_2 = 0$$

$$5(m_1 - m_2) = 0$$

$$m_1 - m_2 = 0$$

$$m_1 = m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{1}$$

अतः $m_1 : m_2 = 1 : 1$

अतः पुनः X- अक्ष की तुलना करने पर

$$x = \frac{-4m_1 + m_2}{m_1 + m_2}$$

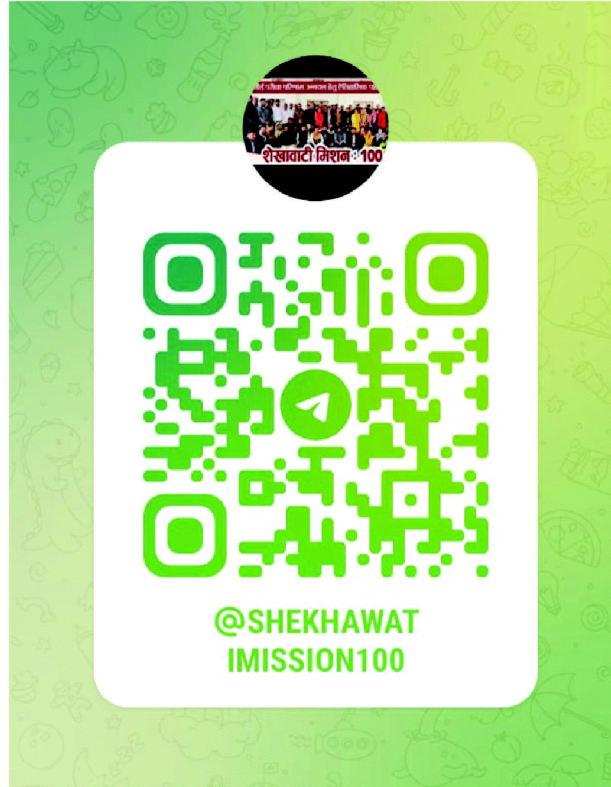
$$x = \frac{-4+1}{1+1} (m_1 \text{ व } m_2 \text{ के मान रखने पर})$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

∴ विभाजन बिन्दू के निर्देशांक

$$P(x, 0)$$

$$P\left(\frac{-3}{2}, 0\right) \text{ हैं।}$$



शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें।

अध्याय

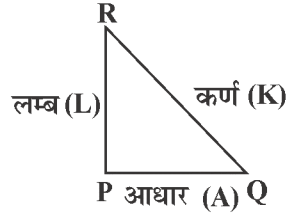
8

त्रिकोणमिति का परिचय

अंक भार-8 प्रश्नों की संख्या-4 [वस्तुनिष्ठ -1 (1 अंक), रिक्त स्थान - 1 (1 अंक),
लघु. - 1 (2 अंक), निबं. - 1 (4 अंक)]

- ❖ त्रिकोण मित्तीय अनुपात:- समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपातों का उसके न्यूनकोणों के सापेक्ष अध्ययन को त्रिकोण मित्तीय अनुपात कहते हैं।

$$\frac{LAL}{KKA}$$



$$\sin\theta = \frac{L}{K}$$

$$\cot\theta = \frac{A}{L}$$

$$\cos\theta = \frac{A}{K}$$

$$\sec\theta = \frac{K}{A}$$

$$\tan\theta = \frac{L}{A}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{K}{L}$$

- ❖ व्युत्क्रम त्रिकोणमित्तीय अनुपात -

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta = 1$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta \cdot \sec\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \Rightarrow \tan\theta \cdot \cot\theta = 1$$

- ❖ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

- ❖ विशेष कोणों के त्रिकोणमित्तीय अनुपातों की सारणी:-

डिग्री रेडियस	0°	30°	45°	60°	90°
त्रिकोणमिति अनुपात	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞ (अपरिभाषित)
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\operatorname{cosec}\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

❖ त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ:-

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta, \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \Rightarrow \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

$$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec}2\theta = 1 + \cot2\theta, \Rightarrow \cot2\theta = \operatorname{cosec}2\theta - 1$$

भाग -अ (Part-A)

1. $\tan45^\circ + \cot45^\circ$ का मान होगा-

- (1) 1 (2) 2
(3) 3 (4) 0 (2)

हल. $\tan45^\circ + \cot45^\circ$

$$= 1 + 1 = 2$$

2. $2\sin45^\circ \cdot \cos45^\circ$ का मान ज्ञात करो:-

- (1) 1 (2) 2
(3) 3 (4) 0 (1)

हल. $2\sin45^\circ \cdot \cos45^\circ$

$$= 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2} = 1$$

3. $\tan^2 60$ का मान है:-

- (1) $\sqrt{3}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
(3) 3 (4) $\frac{1}{3}$ (3)

हल. $\tan^2 60^\circ = (\sqrt{3})^2 = 3 \{ \because \tan60^\circ = \sqrt{3} \}$

4. $\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ + 1$ बराबर है:-

- (1) 2 (2) 1
(3) $\frac{1}{2}$ (4) 0 (1)

हल. $\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ + 1$

$$= 1 + 1 = 2 \{ \because \sin^2\theta + \cos^2\theta \}$$

5. $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ बराबर है:-

- (1) 1 (2) 8
(3) 9 (4) 0 (3)

हल. $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$

$$= 9[\sec^2 A - \tan^2 A] = 9 \times 1 = 9 \{ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \}$$

7. यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ और $\cos B = \frac{1}{2}$, तब (A + B) का

मान है:-

- (1) 30° (2) 0°
(3) 60° (4) 90° (4)

$$\sin A = \frac{1}{2} \qquad \cos B = \frac{1}{2}$$

हल.

$$\Rightarrow \sin A = \sin 30^\circ \qquad \Rightarrow \cos B = \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow A = 30^\circ \qquad \Rightarrow B = 60^\circ$$

$$A + B = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

9. $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ का $\theta = 45^\circ$ मान है:-

- (1) 0 (2) 1
(3) 2 (4) -1 (2)

हल. $\theta = 45^\circ$ रखने पर :-

$$= \frac{1 - \cos 2 \times 45^\circ}{\sin 2 \times 45^\circ} = \frac{1 - \cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{1 - 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

❖ निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उत्तर-पुस्तिका में लिखिए -

1. यदि $\sin \theta = \cos \theta$ तो $\theta = \dots\dots\dots$

हल. $\sin \theta = \cos \theta$

$$\Rightarrow \tan \theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan 45^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

2. $\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} = \dots\dots\dots$

हल.
$$= \frac{1 - (1)^2}{1 + (1)^2} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\because \tan 45^\circ = 1$$

3. $(1 + \tan^2 \theta)(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)$ का मान है।

हल. $= \sec^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)$
 $= \sec^2 \theta \times \cos^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \cos^2 \theta = 1$

4. यदि $\tan \theta = \sqrt{3}$ हो, तो θ का मान..... होगा-

हल. $\Rightarrow \tan \theta = \sqrt{3}$
 $\Rightarrow \tan \theta = \tan 60^\circ$
 $\Rightarrow \theta = 60^\circ$

5. यदि $\tan A = 1$ है तो $\sec A = \dots\dots\dots$ होगा:-

हल. $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$
 $\Rightarrow \sec^2 A = 1 + (1)^2$
 $\Rightarrow \sec^2 A = 1 + 1 = 2$

अतिलघुतरात्मक प्रश्न:-

1. $\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ$ का मान है:-

हल. $\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
 $\Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$
 $\Rightarrow \frac{3+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

2. $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

हल. $= \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ $\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. त्रिकोणमितीय अनुपात $\tan A$ को $\sec A$ के पदों में व्यक्त करें :-

हल. $\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1$

$\Rightarrow \sec^2 A - 1 = \tan^2 A$

$\Rightarrow \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

4. $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}}$ का मान लिखिए :-

हल. $= \frac{1}{\sqrt{\cot^2 \theta}} = \frac{1}{\cot \theta} = \tan \theta$ $\{\because \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1\}$

भाग:- (ब) Part - B

1. यदि $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$0^\circ < A + B \leq 90^\circ$, $A > B$ तो A व B का मान ज्ञात कीजिए-

हल. $\because \tan(A + B) = \sqrt{3}$
 $\Rightarrow \tan(A + B) = \tan 60^\circ$
 $\Rightarrow A + B = 60^\circ \dots\dots\dots (i)$

तथा $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan(A - B) = \tan 30^\circ$

$A - B = 30^\circ$

समी. (i) व (ii) से :-

$A + B = 60^\circ$

$A - B = 30^\circ$

$2A = 90^\circ$

$A = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ समी. (i) में रखने पर :-

$45^\circ + B = 60^\circ$

$B = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ अ

2. $\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$ का मान है:-

हल.
$$\frac{5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2}{1}$$

$$= 5 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{4}{3} - 1$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{16}{3} - \frac{1}{1}$$

$$= \frac{15 + 64 - 12}{12} = \frac{67}{12}$$

3. ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि

$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए-

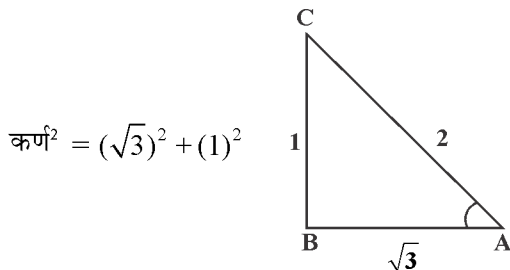
$\sin A \cos C + \cos A \sin C$

हल. $\therefore \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{L}{A}$

$\Rightarrow L = 1, A = \sqrt{3}, K = ?$

पाइथागोरस प्रमेय से :-

कर्ण² = आधार² + लम्ब²



कर्ण² = $(\sqrt{3})^2 + (1)^2$

\Rightarrow कर्ण² = 3 + 1

\Rightarrow कर्ण² = 4

\Rightarrow कर्ण = 2

सर्वप्रथम:- LA के लिए :- $A = \sqrt{3}, L = 1, K = 2$

$\sin A = \frac{L}{K} = \frac{1}{2}, \cos A = \frac{A}{K} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

तथा LC के लिए :- $A = 1, L = \sqrt{3}, K = 2$

$\cos C = \frac{A}{K} = \frac{1}{2}, \sin C = \frac{L}{K} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sin A \cos C + \cos A \sin C$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

4. ΔOPQ जिसका कोण P समकोण है, $OP = 7\text{cm}$ और $QP - PQ = 1\text{cm}$, $\sin \theta$ और $\cos \theta$ के मान ज्ञात कीजिए-

हल. ΔOPQ में

$\therefore OQ - PQ = 1$

$\Rightarrow OQ = 1 + PQ$

पाइथागोरस प्रमेय से :-

कर्ण² = आधार² + लम्ब²

$\Rightarrow OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

$\Rightarrow (1 + PQ)^2 = 7^2 + PQ^2$

$\Rightarrow 1 + PQ^2 + 2PQ = 49 + PQ^2$

$\Rightarrow 2PQ = 48 = PQ = \frac{48}{2} = 24$

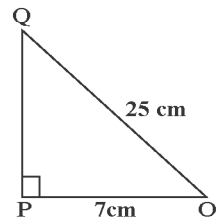
$\therefore OP = 1 + PQ$

$\Rightarrow OP = 1 + 24 = 25$

[Q के लिए :- $A = 24, L = 7, K = 25$

$\sin Q = \frac{L}{K} = \frac{7}{25}$

$\cos Q = \frac{A}{K} = \frac{24}{25}$



5. यदि $3 \cot A = 4$, तो $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$ का मान लिखिए:-

हल. $3 \cot A = 4$

$\cot A = \frac{4}{3} = \frac{A}{L}$

यहाँ $A = 4, L = 3, K = ?$

पाइथागोरस प्रमेय से:-

$$\text{कर्ण}^2 = \text{आधार}^2 + \text{लम्ब}^2$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण}^2 = 4^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण}^2 = 16 + 9$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण}^2 = 25$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण} = 5$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{L}{A}\right)^2}{1 + \left(\frac{L}{A}\right)^2}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}}$$

$$\frac{16 - 9}{16 + 9} = \frac{7}{25}$$

भाग: (स) Part (c)

1. सिद्ध कीजिए-

$$(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cos^2 A$$

हल. L.H.S होने पर :-

$$(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$$

$$= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 \sin A$$

$$\operatorname{cosec} A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2 \cos A \cdot \sec A$$

$$= \sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A \frac{1}{\sin A}$$

$$+ 2 \cos A \cdot \frac{1}{\cos A} + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$$= 1 + 2 + 2 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$$= 5 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$$= 5 + 1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A$$

$$\{ \because \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A, \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

$$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A \text{ R.H.S.}$$

2. सिद्ध कीजिए:- $\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

हल. L.H.S. लेने पर:-

$$= \frac{\cos A}{(1 + \sin A)} + \frac{(1 + \sin A)}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A + (1 + \sin A)^2}{\cos A (1 + \sin A)}$$

$$= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2 \sin A}{\cos A (1 + \sin A)}$$

$$= \frac{1 + 1 + 2 \sin A}{\cos A (1 + \sin A)}$$

$$= \frac{2 + 2 \sin A}{\cos A (1 + \sin A)}$$

$$= \frac{2(1 + \sin A)}{\cos A (1 + \sin A)}$$

$$= \frac{2}{\cos A} = \frac{2 \cdot 1}{\cos A} = 2 \cdot \sec A$$

R.H.S.

3. सिद्ध कीजिए - $\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$

हल. L.H.S. लेने पर:-

$$\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}}$$

हर का परिमेयकरण करने पर:-

$$= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)}{(1 - \sin A)} \times \frac{(1 + \sin A)}{(1 + \sin A)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}} \quad \because (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{(1 + \sin A)}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A + \tan A \text{ R.H.S.}$$

* अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न:-

1. सर्वसमिका $\sec 2\theta = 1 + \tan 2\theta$ का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए-

$$\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$$





@SHEKHAWAT
MISSION100

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें।

अध्याय

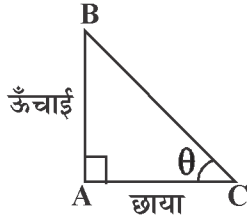
9

त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

अंक : 5 (वस्तुनिष्ठ -1 (1 अंक), अतिलघुत्तरात्मक - 1 (2 अंक), लघुत्तरात्मक-1 (2 अंक)

1. किसी मीनार की छाया उसकी ऊँचाई के बराबर हो तो सूर्य का उन्नयन कोण है:-

हल. दिया गया है:-



AB=AC

$$\tan\theta = \frac{L}{A} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \tan 45^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ अ}$$

2. यदि किसी वृक्ष की छाया उसकी ऊँचाई की $\frac{1}{\sqrt{3}}$ गुना हो, तो सूर्य का उन्नयन कोण है:-

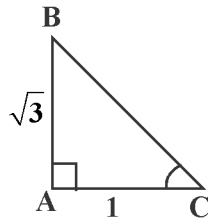
हल.

$$\tan\theta = \frac{L}{A}$$

$$= \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$= \tan\theta = \tan 60^\circ$$

$$= \theta = 60^\circ$$

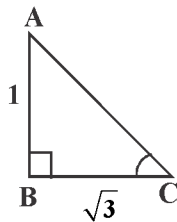


3. एक ऊर्ध्वाधर छड़ की लम्बाई तथा इसकी छाया की लम्बाई का अनुपात 1: $\sqrt{3}$ है, तो सूर्य का उन्नयन कोण है:-

हल.

$$\tan\theta = \frac{L}{A}$$

$$= \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



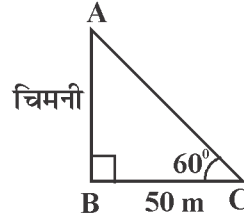
$$= \tan\theta = \tan 30^\circ$$

$$= \theta = 30^\circ$$

4. सूर्य के उन्नयन कोण में वृद्धि (0° से 90° तक) होने से किसी स्तम्भ की परछाई की लम्बाई में क्या परिवर्तन होता है?

हल. परछाई की लम्बाई कम होती जाएगी।

5. एक चिमनी के आधार से 50 मीटर दूरी पर से उसके शिखर का उन्नयन कोण 60° है तो चिमनी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए-



माना चिमनी की ऊँ. = h m

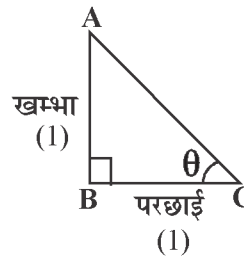
$$\tan 60^\circ = \frac{h}{50}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{50}$$

$$= h = 50\sqrt{3}$$

अतः चिमनी की ऊँ. = $50\sqrt{3}$ m

6. किसी समय एक खम्भे की ऊँचाई व परछाई की लम्बाई समान है तो सूर्य का उन्नयन कोण लिखिए:-



हल. माना सूर्य का उन्नयन कोण = θ

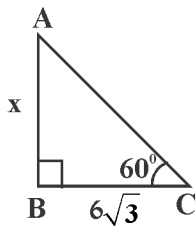
$$\tan \theta = \frac{L}{A} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan 45^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 45^\circ$$

7. चित्र के अनुसार x का मान लिखिए:-



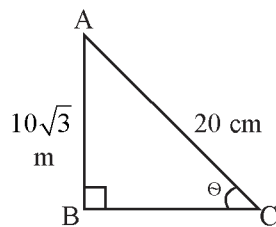
हल. $\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{L}{A}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = 6\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = 18 \text{ M}$$

8. दी गई आकृति में कोण θ का मान ज्ञात कीजिए:-



हल. $\sin \theta = \frac{L}{K}$

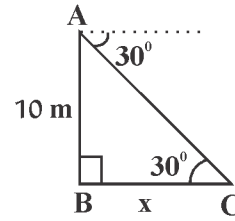
$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{10\sqrt{3}}{20}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 60^\circ$$

9. 10m ऊँची एक मीनार के शिखर से पृथ्वी पर एक बिन्दु का अवनमन कोण 30° है। बिन्दु की मीनार के आधार से दूरी ज्ञात कीजिए।



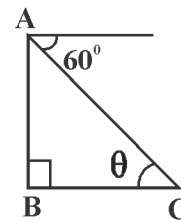
हल. माना मीनार के आधार से बिन्दु की दूरी = x m

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x}$$

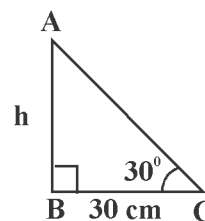
$$\Rightarrow x = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

10. निम्न चित्र में उन्नयन कोण θ ज्ञात कीजिए:-



हल. $\theta = 60^\circ$

1. भूमि के एक बिन्दु से, जो मीनार के पाद-बिन्दु से 30 मी. की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए-



हल. माना मीनार की ऊँ. = h मीटर

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

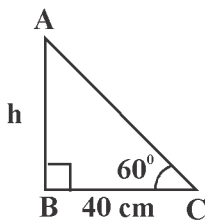
$$\Rightarrow \sqrt{3}h = 30$$

$$\Rightarrow h = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{30 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}m$$

2. एक स्तम्भ के आधार से 40 मीटर दूर स्थित बिन्दु से स्तम्भ के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण 60° है। स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल. माना स्तम्भ की ऊँ. = h m

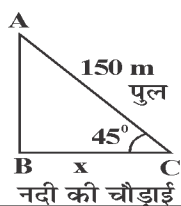
$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{h}{40}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{40}$$

$$\Rightarrow h = 40\sqrt{3}m$$

अतः स्तम्भ की ऊँ. = $40\sqrt{3}m$

3. एक नदी के ऊपर पुल नदी के किनारे के साथ 45° का कोण बनाता है, यदि नदी के ऊपर पुल की लम्बाई 150 मीटर हो तब नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए:-



हल. माना नदी की चौड़ाई = x m

$$\therefore \cos 45^\circ = \frac{A}{K}$$

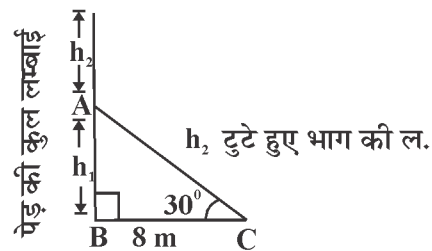
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{150}$$

$$\Rightarrow x = \frac{150 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$x = \frac{150\sqrt{2}}{2} = 75\sqrt{2}$$

अतः नदी की चौड़ाई = $75\sqrt{2}m$

4. आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद बिन्दु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल. माना पेड़ की कुल ल. = $(h_1+h_2)m$

ΔABC में:-

$$\tan 30^\circ = \frac{L}{A}$$

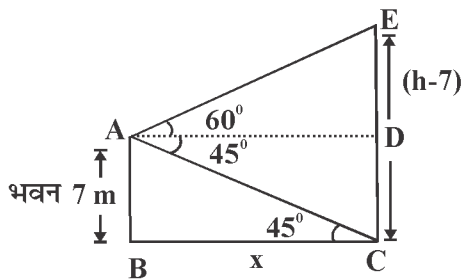
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h_1}{8}$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{8}{\sqrt{3}} \dots \dots (i)$$

$$\begin{aligned} \text{पुनः } \cos 30^\circ &= \frac{A}{K} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{8}{h_2} \\ \Rightarrow \sqrt{3} \times h_2 &= 16 \\ \Rightarrow h_2 &= \frac{16}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः पेड़ की कुल ऊँ.} &= \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{8+16}{\sqrt{3}} = \frac{24 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{24\sqrt{3}}{3} \\ &= 8\sqrt{3} \text{ m.} \end{aligned}$$

5. 7m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनयन कोण 45° है। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल. माना टावर की ऊँचाई = h m.
 $\triangle ABC$ में :-

$$\begin{aligned} \tan 45^\circ &= \frac{L}{A} \\ \Rightarrow \frac{1}{1} &= \frac{7}{x} \\ \Rightarrow x &= 7 \dots \dots \dots (i) \end{aligned}$$

पुनः $\triangle ADE$ में:-

$$\begin{aligned} \tan 60^\circ &= \frac{L}{A} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} &= \frac{(h-7)}{x} \\ \Rightarrow \sqrt{3}x &= h-7 \dots \dots \dots (ii) \end{aligned}$$

समी. (i) व (ii) से :-

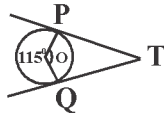
$$\begin{aligned} \Rightarrow 7\sqrt{3} &= h-7 \\ \Rightarrow h &= 7\sqrt{3} + 7 \\ \Rightarrow h &= 7(\sqrt{3} + 1) \text{ m} \end{aligned}$$

1. एक 80 मी. चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लम्बाई वाले दो खम्भे लगे हुए हैं। इन दोनों खम्भों के बीच सड़क के एक बिन्दु से खम्भों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° है। खम्भों की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 40 मी. अधिक लम्बी हो जाती है जबकि सूर्य का उन्नतांश कोण 60° से घटकर 30° हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।
3. सुमद्र तल से 75 मीटर ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनयन कोण 45° और 60° है। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो, तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न 1 (1)

1. एक वृत्त पर स्थित बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?
(1) 1 (2) 0
(3) 2 (4) अनन्त (1)
2. एक वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?
(1) 1 (2) 2
(3) अनन्त (4) 0 (2)
3. एक वृत्त पर कुल कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?
(1) 1 (2) अनन्त
(3) 2 (4) 0 (2)
4. वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को कहते हैं?
(1) स्पर्श बिन्दु (2) केन्द्र बिन्दु
(3) त्रिज्या (4) जीवा (1)
5. 5 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ=12 सेमी. तो PQ की लम्बाई होगी?
(1) 12 सेमी. (2) 113 सेमी.
(3) $\sqrt{119}$ सेमी. (4) 8.5 सेमी. (3)
6. एक बिन्दु P से वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24 सेमी. तथा बिन्दु P की केन्द्र से दूरी 25 सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या होगी?
(1) 7 सेमी. (2) 15 सेमी.
(3) 12 सेमी. (4) 24.5 सेमी. (1)
7. किसी वृत्त के व्यास के सिरे पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर होती हैं?
(1) लंबवत (2) समान्तर
(3) प्रतिच्छेदी (4) इनमे से कोई नहीं (2)

8. तीन संरेखीय बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों की संख्या है?
(1) 1 (2) 2
(3) 0 (4) अनन्त (1)
9. किसी वृत्त की त्रिज्या और उस पर खींची गई स्पर्श रेखा के मध्य कितने डिग्री का कोण होता है?
(1) 180° (2) 0°
(3) 90° (4) 360° (3)

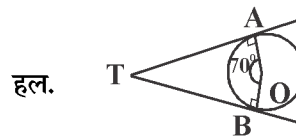
10.  आकृति में TP, TQ केन्द्र O

वाले वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार है कि $\angle POQ=115^\circ$ तो $\angle PTQ$ बराबर है?

- (1) 115° (2) 55°
(3) 45° (4) 65° (4)
11. यदि एक बिन्दु P से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर झुकी हो तो $\angle AOB$ का मान कितना होगा?
(1) 80° (2) 180°
(3) 100° (4) 90° (3)

लघुतरात्मक प्रश्न

1. यदि एक बिन्दु T से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर TA व TB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 70° के कोण पर झुकी होतो $\angle AOB$ ज्ञात कीजिए।



चित्रानुसार, O केन्द्र वाले वृत्त पर TA व TB परस्पर स्पर्श रेखाएँ हैं, तथा $\angle TAO=\angle TBO=90^\circ$ (स्पर्श रेखा पर त्रिज्या लंबवत होती है।)

$$\angle ATB = 70^\circ$$

$$\therefore \angle TAO + \angle TBO + \angle ATB + \angle AOB = 360^\circ$$

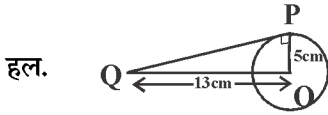
$$90^\circ + 90^\circ + 70^\circ + \angle AOB = 360^\circ$$

$$250^\circ + \text{AOB} = 360^\circ$$

$$\text{AOB} = 360^\circ - 250^\circ$$

$$\text{AOB} = 110^\circ$$

2. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा के बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $\text{OQ} = 13$ सेमी, तो PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए



$$\text{OQ} = 13 \text{ cm}$$

$$\text{तथा त्रिज्या } \text{OP} = 5 \text{ cm}$$

$$\text{तथा } \angle \text{OPQ} = 90^\circ \text{ (स्पर्श रेखा पर त्रिज्या लम्बवत)}$$

अतः समकोण त्रिभुज OPQ में,

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\text{OQ}^2 = \text{PQ}^2 + \text{OP}^2$$

$$13^2 = \text{PQ}^2 + 5^2$$

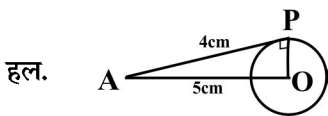
$$169 = \text{PQ}^2 + 25$$

$$\text{PQ}^2 = 169 - 25$$

$$\text{PQ} = \sqrt{144}$$

$$\text{PQ} = 12 \text{ cm}$$

3. एक बिन्दु A से, जो एक वृत्त के केन्द्र से 5 सेमी दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 4 सेमी है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करो।



चित्रानुसार, $\text{OA} = 5 \text{ cm}$

तथा स्पर्श रेखा $\text{AP} = 4 \text{ cm}$

तथा $\text{APO} = 90^\circ$ (स्पर्श रेखा पर त्रिज्या लम्बवत)

अतः समकोण त्रिभुज AOP में,

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\text{OA}^2 = \text{AP}^2 + \text{OP}^2$$

$$5^2 = 4^2 + \text{OP}^2$$

$$25 = 16 + \text{OP}^2$$

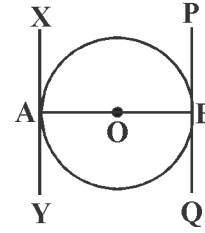
$$\Rightarrow \text{OP}^2 = 25 - 16$$

$$\text{OP} = \sqrt{9}$$

$$\text{OP} = 3 \text{ cm}$$

अतः त्रिज्या $\text{OP} = 3 \text{ cm}$ अ

4. सिद्ध करें कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं?



दिया है:-

\therefore एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा व्यास AB है। तथा XY, PQ स्पर्श रेखाएँ हैं।

सिद्ध करना है:- $\text{XY} \parallel \text{PQ}$

- हल. \therefore OA त्रिज्या तथा XY स्पर्श रेखाएँ है

$$\angle \text{OAX} = 90^\circ \text{ (}\therefore \text{ त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लम्बवत होती)}$$

तथा इसी प्रकार,

OB त्रिज्या तथा PQ स्पर्श रेखा है

$$\therefore \angle \text{OBQ} = 90^\circ$$

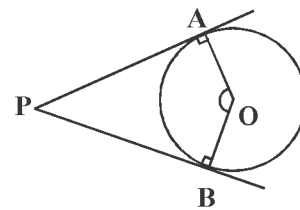
$$\therefore \angle \text{OAX} = \angle \text{OBQ} = 90^\circ$$

परंतु यहां समांतर रेखा के एकांतर कोण है।

जब एक तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

अतः $\text{XY} \parallel \text{PQ}$

5. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है तथा PA व PB स्पर्श रेखाएँ हैं तो सिद्ध करो कि AOBP एक चक्रीय चतुर्भुज है?



दिया है :- O वृत्त का केन्द्र है तथा AP, PB स्पर्श रेखा हैं।

सिद्ध करना है:- AOBP एक चक्रीय चतुर्भुज है।

- हल. \therefore PA, PB स्पर्श रेखा एवं OA, OB वृत्त की त्रिज्या है।

$$\therefore \angle \text{OAP} = 90^\circ \text{ तथा } \angle \text{OBP} = 90^\circ$$

$$\therefore \angle \text{OAP} + \angle \text{OBP} + \angle \text{AOB} + \angle \text{APB} = 360^\circ$$

(चतुर्भुज के चारों कोणों का योग)

$$90^\circ + 90^\circ + \angle \text{AOB} + \angle \text{APB} = 360^\circ$$

$$\angle AOB + \angle APB = 360^\circ - 180^\circ$$

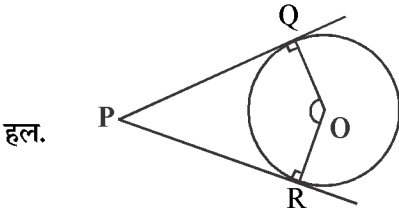
$$\angle AOB + \angle APB = 180^\circ$$

यहाँ सम्मुख कोणों का योग संपूरक है।

अतः चतुर्भुज AOBP एक चक्रीय चतुर्भुज है।

दीर्घउत्तरात्मक प्रश्न:-

1. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड द्वारा केन्द्र पर अंतरिक कोण का संपूरक होता है?



दिया है:- एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा PQ तथा PR वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

सिद्ध करना है:- $\angle ROQ + \angle QPR = 188$

हल:- वृत्त में OQ त्रिज्या है तथा PQ स्पर्श रेखा है

$\therefore \angle OQP = 90^\circ$ (स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लम्बवत होती है।)

इसी प्रकार

$$\angle ORP = 90^\circ$$

चतुर्भुज PQOR में,

$$\angle RPQ + \angle QOR + \angle OQP + \angle ORP = 360^\circ$$

$$\angle RPQ + \angle QOR + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\angle RPQ + \angle QOR + 180^\circ = 360^\circ$$

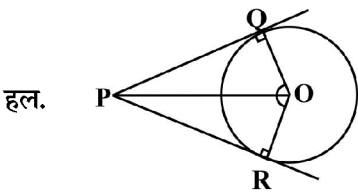
$$\angle RPQ + \angle QOR = 360^\circ - 180^\circ$$

$$\angle RPQ + \angle QOR = 180^\circ$$

$$\angle ROQ + \angle QPR = 180^\circ$$

अतः $\angle ROQ + \angle QPR = 180^\circ$

2. सिद्ध कीजिए कि बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाईयां बराबर होती है?



दिया है:- एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा

PQ तथा PR वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

सिद्ध करना है :- $PQ = PR$

रचना:- OP, OQ, OR को मिलाया

उपपत्ति (हल):-

\therefore स्पर्श रेखा, वृत्त की त्रिज्या पर लंबवत होती है।

$$\therefore \angle OQP = \angle ORP = 90^\circ$$

अब $\triangle PQO$ व $\triangle PRO$ में

$$\angle OQP = \angle ORP \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$OP = OP \text{ (उभयनिष्ठ भुजा)}$$

$$OQ = OR \text{ (वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

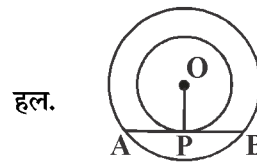
अतः भुजा - कोण - भुजा सर्वांगसमता नियम से,

$$\triangle PQO \cong \triangle PRO$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होती हैं।

$$\text{भुजा } PQ = \text{भुजा } PR$$

3. सिद्ध करो कि दो संकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है?



दिया है:- O केन्द्र वाले दो संकेन्द्रीय वृत्त हैं

बड़े वृत्त की जीवा AB जो छोटे वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है

सिद्ध करना है:- $AP = BP$

रचना :- OP को मिलाया।

उपपत्ति :- AB छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है तथा OP त्रिज्या है।

$$\therefore OP \perp AB$$

अतः OP जीवा AB को समद्विभाजित करेगी क्योंकि केन्द्र से जीवा पर खींचा गया लंब उसे समद्विभाजित करता है।

$$\text{अर्थात - } AP = BP$$

अध्याय

11

वृत्त से संबंधित क्षेत्रफल

अंकभार : 5 (वस्तुनिष्ठ -1 (1 अंक), रिक्तस्थान -1 (1 अंक)

अतिलघु. -1 (1 अंक), लघु.-1 (2 अंक)

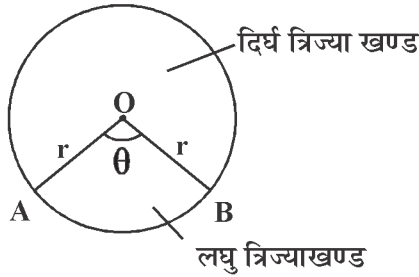
- ❖ वृत्त की परिधि = $2\pi r$
- ❖ अर्द्ध वृत्त की परिधि / परिमाण = $\pi r + 2r$
- ❖ वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

- ❖ अर्द्ध वृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times \pi r^2$

जहाँ $\pi = \frac{22}{7}$ अथवा 3.14 (लगाया) व $r =$ वृत्त की

त्रिज्या

- ❖ वृत्त का त्रिज्य खण्ड :- किसी वृत्त की दो त्रिज्याओं और एक चाप से घिरे क्षेत्र को वृत्त का त्रिज्य खण्ड कहते हैं।



- लघु त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल (A) = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

- दिर्घ त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{(360^\circ - \theta)}{360^\circ} \times \pi r^2$

जहाँ θ चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण, r वृत्त की त्रिज्या

- संगत चाप की लम्बाई (L) = $\frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

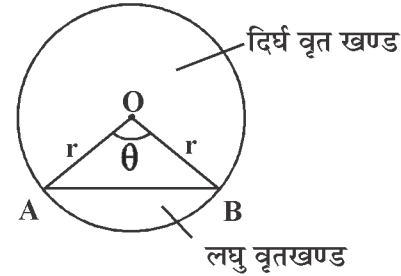
- जब चाप की लम्बाई ज्ञात हो तो त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल

त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ चाप की लम्बाई \times त्रिज्या

$$= \frac{1}{2} \times l \times r$$

Note:- यह चाप की लम्बाई व त्रिज्य खण्ड के क्षेत्रफल में संबंध को दर्शाता है।

- ❖ वृत्त खण्ड:- वृत्त की जीवा वृत्त को दो भागों में विभाजित करती हैं। इसमें बड़े भाग को दिर्घवृत्त खण्ड व छोटे भाग को लघु वृत्त खण्ड कहते हैं।



- लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$

- दिर्घ वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्र. - लघु

वृत्तखण्ड का क्षेत्र. = $\pi r^2 - \left[\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \right]$

जहाँ $r =$ वृत्त की त्रिज्या, $\theta =$ चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण

कुछ महत्वपूर्ण बिन्दु:-

- ❖ लघु चाप का डिग्री माप 180° से कम होता है।
- ❖ दीर्घ चाप का डिग्री माप 180° से अधिक होता है।
- ❖ वृत्त के प्रत्येक चतुर्थांश के कोण का डिग्री मान 90° होता है।
- ❖ वृत्त के केन्द्र पर बने कोण का डिग्री मान 360° होता है।
- ❖ घड़ी के मिनट की सूई 1 मिनट में 6° का कोण बनाती है।
- ❖ π एक अपरिमेय संख्या होती है।
- ❖ त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्या खण्ड का क्षेत्रफल जिसका कोण P° है, निम्नलिखित है।

$$(1) \frac{P}{180} \times 2\pi r \quad (2) \frac{P}{180} \times \pi r^2$$

$$(3) \frac{P}{360} \times 2\pi r \quad (4) \frac{P}{720} \times 2\pi r^2 \quad (4)$$

2. एक वृत्त की परिधि 176 सेमी. है, तो उसकी त्रिज्या है-

- (1) 21 सेमी. (2) 14 सेमी.
(3) 28 सेमी. (4) 7 सेमी. (3)

3. एक वृत्त के त्रिज्य खण्ड का केन्द्रीय कोण 120° है तथा

इसका क्षेत्रफल $\frac{66}{7}$ वर्ग सेमी है। वृत्त की त्रिज्या का मान

ज्ञात करो?

- (1) 2.5 सेमी. (2) 3 सेमी.
(3) 3.5 सेमी. (4) 6 सेमी. (2)

4. एक r सेमी त्रिज्या के वृत्त में θ केन्द्रीय कोण पर संगत चाप व जीवा के बीच परिवर्द्ध है लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल का मान है-

$$(1) \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$(2) \pi r^2 \left(\frac{\theta}{360} - \sin\theta \cos\theta \right) \text{ वर्ग सेमी}$$

$$(3) \pi r^2 \left(\frac{\theta}{360} - \frac{\sin\theta \cos\theta}{2} \right) \text{ वर्ग सेमी}$$

$$(4) r^2 \left(\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta \cos\theta}{2} \right) \text{ वर्ग सेमी} \quad (4)$$

5. यदि वृत्त के लघु त्रिज्या खण्ड का कोण 250° है, तो दिर्घ त्रिज्या खण्ड का कोण होगा-

- (1) 250° (2) 110°
(3) 360° (4) 80° (2)

{ संकेत :- $360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$ }

6. 14 सेमी व्यास वाले एक पहिये द्वारा एक चक्कर में तयकी गयी दूरी है-

- (1) 122 सेमी. (2) 44 सेमी
(3) 54 सेमी (4) 84 सेमी (2)

7. यदि दो वृत्तों की त्रिज्याएं r_1 व r_2 है तो इन दोनों वृत्तों की परिधि के योग के समतुल्य परिधि के वृत्त की त्रिज्या r

का मान होगा-

$$(1) r = r_1 + r_2 \quad (2) r^2 = r_1^2 + r_2^2$$

$$(3) r = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (4) r = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} \quad (1)$$

रिक्त स्थानों की पूर्ति करे-

1. वृत्त के अनुदिश एक पूरे चक्कर में तय गयी दूरी को वृत्त की कहते हैं? (Ans. परिधि)

2. वृत्त की जीवा वृत्त को दो भागों में विभाजित करती है। इसमें बने प्रत्येक भाग को कहते हैं। (Ans. वृत्त खण्ड)

3. वृत्त के केन्द्र पर बना कोण समकोण के बराबर होता है। (Ans. चार)

4. यदि एक वृत्त का परिमाण और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है तो उस वृत्त की त्रिज्या है। (Ans. 2 मात्रक)

{ संकेत:- वृत्त का क्षेत्रफल = वृत्त का परिमाण

$$\pi r^2 = 2\pi r \Rightarrow r = 2 \text{ मात्रक } \}$$

5. घड़ी के मिनट की सूई द्वारा 1 मिनट में बनाया गया कोण..... होता है। (Ans. 6°)

6. यदि वृत्त के दिर्घ त्रिज्या खण्ड का कोण 200° है तो लघु त्रिज्याखण्ड का कोण होगा। (Ans. 160°)

{ संकेत :- $360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$ }

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न-

1. घड़ी के मिनट की सूई द्वारा 20 मिनट में केन्द्र पर आन्तरिक कोण का मान ज्ञात कीजिए-

हल. \therefore 1 मिनट में बनाया गया कोण = 6°

$$\text{तब 20 मिनट में बनाया गया कोण} = 20 \times 6^\circ = 120^\circ$$

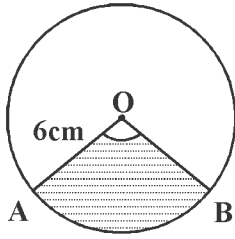
2. उस त्रिज्या खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके चाप की लम्बाई (L) 10 सेमी. और त्रिज्या 6 सेमी. है।

हल. त्रिज्या (r) = 6 सेमी. व चाप की लम्बाई (L) = 10 सेमी.

$$\therefore \text{त्रिज्या खण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times L \times r$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30 \text{ cm}^2$$

3. 6 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका कोण 60°



हल. \therefore केन्द्र का कोण (θ) = 60°
त्रिज्या (r) = 6 सेमी.

$$\begin{aligned} \text{त्रिज्या खण्ड का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} = \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 6 \times 60^\circ}{360^\circ} \\ &= \frac{132}{7} = 18.86 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

4. एक वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 सेमी है।

हल. वृत्त की परिधि = 22 सेमी.

$$\Rightarrow 2\pi r = 22 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow R = \frac{22}{2\pi}$$

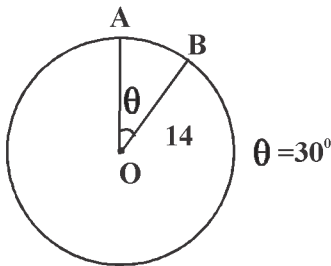
$$\Rightarrow R = \frac{22}{2 \times 22} \times 7 = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

केन्द्रीय कोण [चतुर्थांश] $\theta = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \text{चतुर्थांश का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{90^\circ}{360^\circ} \\ &= \frac{77}{8} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

5. एक घड़ी के मिनट की सूई जिसकी लम्बाई 14 सेमी है। इस सूई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल.



मिनट की सूई द्वारा 1 मिनट में बना कोण = 6°

अतः 5 मिनट में मिनट की सूई द्वारा रचित कोण = $5 \times 6^\circ = 30^\circ$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

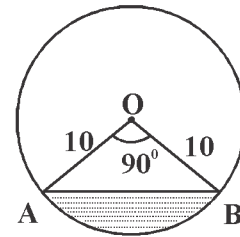
सूई की लम्बाई (R) = 14 cm

$$\text{सूई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$

$$= \frac{154}{3} \text{ cm}^2$$

6. 10 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर एक समकोण आन्तरित करती है। संगत लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करें? $\{\pi = 3.14\}$



हल. वृत्त की त्रिज्या (r) = 10 cm

केन्द्र पर बना कोण (θ) = 90°

$$\text{संगत लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \frac{r^2}{2} \sin \theta$$

$$= \frac{3.14 \times 10 \times 10 \times 90}{360} - \frac{10 \times 10}{2} \sin 90^\circ$$

$$= \frac{314}{4} - 50 \times 1 \quad \{\sin 90^\circ = 1\}$$

$$= 78.5 - 50 = 28.5 \text{ cm}^2$$

लघुत्तरात्मक प्रश्न-

1. एक r त्रिज्या के वृत्त से θ के कोण के त्रिज्या खण्ड को काटकर अलग किया गया है। इस टुकड़े का परिमाण ज्ञात करो?

हल.



r त्रिज्या के वृत्त से एक त्रिज्या खण्ड OAB काटकर अलग किया गया है।

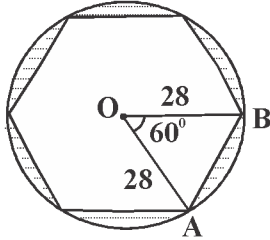
त्रिज्या खण्ड का परिमाण = OA + चाप AB + OB

$$= r + \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + r$$

$$= 2r \left(1 + \frac{\pi\theta}{360^\circ} \right) \text{ इकाई}$$

2. एक गोल मेजपोश पर छः समान डिजाइन बने हुए हैं जैसा कि आकृति में दिखाया गया है, यदि मेजपोश की त्रिज्या 28 सेमी. है, तो 0.35 प्रति वर्ग सेमी की दर से इन डिजाइनों को बनाने की लागत ज्ञात करो? $\{\sqrt{3} = 1.7\}$ हल.

हल.



प्रश्नानुसार समान डिजाइनों की संख्या = 6

प्रत्येक डिजाइन द्वारा केन्द्र पर बना कोण (θ)

$$= \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

डिजाइन की त्रिज्या (r) = 28cm

प्रत्येक डिजाइन वृत्त खण्ड के आकार का है।

$$\text{एक डिजाइन का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \frac{r^2}{2} \sin \theta$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{28 \times 28 \times 60^\circ}{360^\circ} - \frac{28 \times 28}{2} \times \sin 60^\circ$$

$$= 410.66 - 14 \times 28 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 410.66 - \frac{14 \times 28 \times 1.7}{2}$$

$$= 410.66 - 333.2 = 77.46 \text{ cm}^2$$

अतः 6 डिजाइनों का क्षेत्रफल = 6 × एक डिजाइन का क्षेत्रफल

$$= 6 \times 77.46 = 464.76 \text{ cm}^2$$

1cm² डिजाइन का खर्च = 0.35 रु.

अतः 464.76 cm² डिजाइन बनाने का कुल खर्च

$$= 0.35 \times 464.76$$

$$= 162.68 \text{ रु.}$$

अतः डिजाइनों को बनाने की लागत = 162.82 रु.

3. किसी कार के वाइपर दो हैं, परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लम्बाई 25 सेमी. है। और 115° के कोण तक घूम कर सफाई कर सकती है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात करो?

पत्ती की लम्बाई = (R) = 25cm

त्रिज्याखण्ड का कोण (Q) = 115°

वाइपर त्रिज्याखण्ड के रूप में घूमता है।

त्रिज्या खण्ड का क्षेत्रफल = एक पत्ती द्वारा घूमा गया क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$$

$$= \frac{115}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 25 \times 25$$

$$= \frac{11 \times 115 \times 25}{36 \times 7}$$

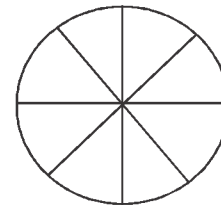
अतः वाइपर की दो पत्तियों द्वारा घूमा गया क्षेत्रफल

$$= \frac{11 \times 115 \times 25 \times 5}{36 \times 7}$$

$$= \frac{158125}{122} = 1255 \text{ cm}^2 \text{ (लगभग)}$$

4. एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर हैं। छतरी को 45 सेमी. त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए इसके दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करें?

हल.



प्रश्नानुसार, वृत्त की त्रिज्या (r) = 45cm

तानों की संख्या = 8

$$\text{केन्द्रिय कोण } (\theta) = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$\text{दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल (त्रिज्या खण्ड)} = \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$$

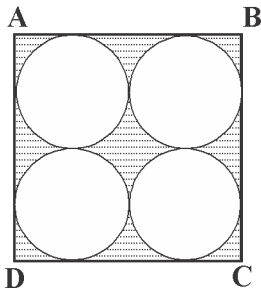
$$= \frac{45^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 45 \times 45$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{22}{7} \times 45 \times 45$$

$$= \frac{22275}{28} \text{ cm}^2$$

5. आकृति में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है।

हल.



$$\text{वर्ग ABCD क्षेत्रफल} = 14 \times 14 = 196 \text{ cm}^2$$

$$\text{प्रत्येक वृत्त का व्यास} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

$$\text{अतः प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या} = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

$$\text{अतः चारों वृत्तों का क्षेत्रफल} = 4\pi r^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \text{ cm}^2$$

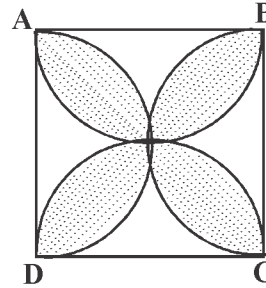
$$= 4 \times \frac{77}{2} = 2 \times 77 = 154 \text{ cm}^2$$

$$\text{अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = 196 - 154 = 42 \text{ cm}^2$$

6. आकृति में छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABCD भुजा 10 cm का एक वर्ग है तथा इस वर्ग

की प्रत्येक भुजा को व्यास मानकर अर्द्धवृत्त खींचे गए हैं।
($\pi = 3.14$ का प्रयोग)

हल.



सर्वप्रथम अछायांकित क्षेत्रों को I, II, III, IV अंकित किया।

यहाँ वर्ग की भुजा = 10 cm

अतः अर्द्ध वृत्त का व्यास = 10 cm

$$\text{अर्द्धवृत्त की त्रिज्या} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

अछायांकित भाग (I + III) का क्षेत्रफल =

ABCD वर्ग का क्षेत्रफल - दोनों अर्द्ध वृत्तों का क्षेत्रफल

$$= \left(10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \pi r^2 \right)$$

$$= (100 - 3.14 \times 5 \times 5)$$

$$= (100 - 78.5) = 21.5 \text{ cm}^2$$

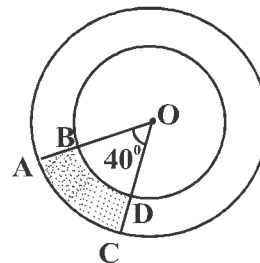
इसी प्रकार अछायांकित भाग (II+IV) का क्षेत्रफल = 21.5 cm²

छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल. ABCD वर्ग का क्षेत्रफल - (I + II + III + IV) का क्षेत्रफल

$$= (100 - 2 \times 21.5) = (100 - 43) = 57 \text{ cm}^2$$

7. छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केन्द्र O वाले दोनों संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएं क्रमशः 7 cm व 14 cm है तथा $\angle AOC = 40^\circ$ है।

हल.



छोटे वृत्त की त्रिज्या (r) = 7 cm

बड़े वृत्त की त्रिज्या (R) = 14cm

केन्द्रीय कोण (θ) = $\angle AOC = 40^\circ$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = बड़े त्रिज्या खण्ड OAC का क्षेत्रफल - छोटे त्रिज्या खण्ड OBD का क्षेत्रफल

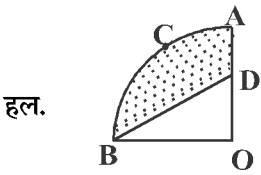
$$= \frac{\pi R^2 \theta}{360^\circ} - \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} = \frac{\pi \theta}{360^\circ} (R^2 - r^2)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{40}{360^\circ} (14^2 - 7^2)$$

$$= \frac{22}{63} (196 - 49)$$

$$= \frac{22}{63} \times 147 = \frac{22}{3} \times 7 = \frac{154}{3} \text{ cm}^2$$

8. आकृति OACB में OACB केन्द्र O और त्रिज्या 3.5 सेमी. वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है। यदि OD = 2cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करे।



हल.

प्रश्नानुसार, चतुर्थांश OACB की त्रिज्या

(R) = 3.5cm

त्रिज्याखण्ड का कोण $\theta = 90^\circ$

OD = 2 cm

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = चतुर्थांश OACB का क्षेत्रफल - Δ OBD का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi R^2 \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

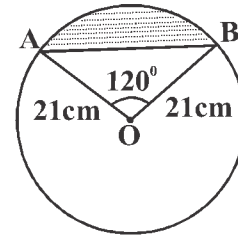
$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5 \times 3.5 \times 90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 3.5 \times 2$$

$$= \frac{22}{7} - 3.5 = \frac{77 - 28}{8} = \frac{49}{8} \text{ cm}^2$$

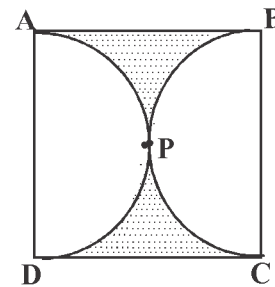
अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न:-

1. जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस 80° कोण वाले एक त्रिज्याखण्ड में 16.5 किमी. की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें जहाँ तक जहाजों को चेतावनी दी जा सके? ($\pi = 3.14$ का प्रयोग)
2. 15m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को 5cm लम्बी रस्सी से बांध दिया गया मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें जहाँ तक घोड़ा चर सकता है।
3. छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें यदि वृत्त की त्रिज्या

21cm है और $\angle AOB = 120^\circ$ $\left[\pi = \frac{22}{7} \right]$



4. एक वर्गाकार रुमाल पर, 9 वृत्ताकार डिजाइन बने हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7cm है। रुमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो?
5. आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि ABCD भुजा 14cm का एक वर्ग है तथा APD और BPC दो अर्द्धवृत्त हैं।



अध्याय

12

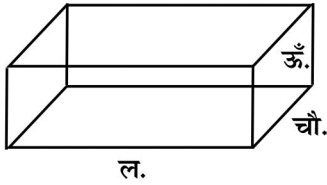
पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन

अंकभार : 6 (वस्तुनिष्ठ -1 (1 अंक), रिक्तस्थान -1 (1 अंक)

अतिलघु. -2 (प्रत्येक 1 अंक), लघु.-1 (2 अंक)

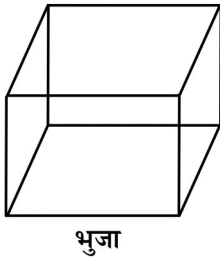
घनाभ -

- ❖ घनाभ का क्षेत्रफल = $2 \times (\text{ल.} \times \text{चौ.} + \text{चौ.} \times \text{ऊँ} + \text{ऊँ} \times \text{ल.})$
- ❖ घनाभ का पार्श्वपृष्ठीय क्षेत्रफल = $2 \times \text{ऊँचाई} (\text{ल.} + \text{चौ.}) = \text{परिमाप} \times \text{ऊँचाई}$
- ❖ घनाभ के आधार का क्षेत्रफल = $\text{ल.} \times \text{चौ.}$
- ❖ घनाभ का आयतन = $\text{ल.} \times \text{चौ.} \times \text{ऊँ.}$
- ❖ घनाभ के विकर्ण की लम्बाई = $\sqrt{(\text{ल.})^2 + (\text{चौ.})^2 + (\text{ऊँ.})^2}$



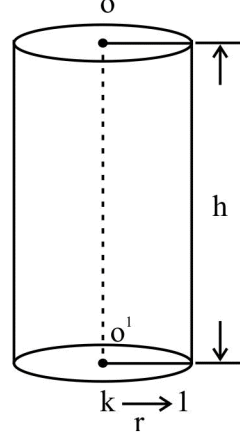
घन -

- ❖ घन का क्षेत्रफल = $6 \times (\text{भुजा})^2$
- ❖ घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4 \times (\text{भुजा})^2$
- ❖ घन के आधार का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$
- ❖ घन का आयतन = $(\text{भुजा})^3$
- ❖ घन के विकर्ण की लम्बाई = $\sqrt{2} \times \text{भुजा}$



बेलन -

- ❖ बेलन का वक्रपृष्ठीय/पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi rh$
- ❖ बेलन के आधार का क्षेत्रफल = πr^2
- ❖ बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r(r+h)$
- ❖ बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$



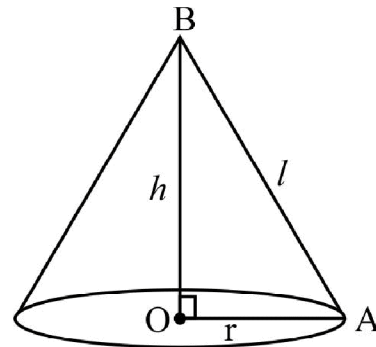
शंकू -

- ❖ शंकू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l$
- ❖ शंकू के आधार का क्षेत्रफल = πr^2
- ❖ शंकू के सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r(r+l)$
- ❖ शंकू का आयतन = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \text{बेलन का आयतन}$$

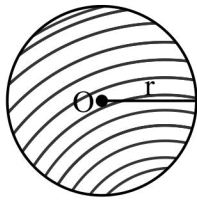
जहाँ $r = \text{त्रिज्या}$

$$h = \text{ऊँचाई} \quad l = \sqrt{r^2 + h^2}$$

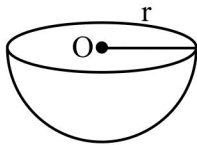
 $l = \text{तिर्यक ऊँचाई}$ 

गोला-

- ❖ गोले का क्षेत्रफल = $4\pi r^2$
- ❖ अर्द्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2\pi r^2$
- ❖ अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $3\pi r^2$
- ❖ गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$
- ❖ अर्द्ध गोले का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$



गोला



अर्द्ध गोला

वस्तुनिष्ठ प्रश्न -

- प्रश्न 1. समान ऊँचाई व त्रिज्याएं r_1 व r_2 के शंकुओं के आयतन में अनुपात होगा -
- (अ) $r_1 : r_2$ (ब) $r_1^2 : r_2^2$
- (स) $r_1^3 : r_2^3$ (द) $\sqrt{r_1} : \sqrt{r_2}$ (ब)
- प्रश्न 2. एक गोले का व्यास 6 सेमी. है। गोले का आयतन होगा-
- (अ) 16π घन सेमी (ब) 20π घन सेमी
- (स) 36π घन सेमी (द) 30π घन सेमी (स)
- प्रश्न 3. दो गोलो की त्रिज्याएं 1 : 2 में हैं उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात होगा -
- (अ) 1 : 2 (ब) 2 : 6
- (स) 1 : 4 (द) 2 : 3 (स)
- प्रश्न 4. एक ठोस गोले की त्रिज्या, वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल S व आयतन V में सम्बंध है-
- (अ) $VR = 3S$ (ब) $3V = SR$
- (स) $4V = SR$ (द) इनमें से कोई नहीं (ब)

[HINTS $S=4\pi R^2$, $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ अतः $3V = 4\pi R^2 \times R$ $3V = SR$]

प्रश्न 5. एक बेलन का आयतन 30π सेमी³ है तथा आधार का क्षेत्रफल 6π वर्ग सेमी है, तब बेलन की ऊँचाई ज्ञात करो-

- (अ) 4 cm (ब) 3 cm
- (स) 2 cm (द) 5 cm (द)

Hints = $V = 30\pi \Rightarrow \pi r^2 h = 30\pi \rightarrow r^2 h = 30$ - (i)

$S = 6\pi \Rightarrow \pi r^2 = 6\pi \Rightarrow r^2 = 6$ - (ii)

(i) व (ii) से $6h = 30 \Rightarrow h = 5$ cm

प्रश्न 6. भुजा 7 cm वाले एक घनाकार ब्लॉक के उपर एक अर्द्धगोला रखा है अर्द्ध गोले का अधिकतम व्यास होगा-

- (अ) 7 सेमी (ब) 14 सेमी
- (स) 21 सेमी (द) 28 सेमी (अ)

प्रश्न 7. शंकू की त्रिज्या 6 सेमी तथा ऊँचाई 8 सेमी है, शंकू की तिर्यक ऊँचाई होगी -

- (अ) 5 सेमी (ब) 10 सेमी
- (स) 6 सेमी (द) 14 सेमी (ब)

[Hints = $l^2 = r^2 + h^2$]

प्रश्न 8. किसी घन का आयतन 125 cm^3 है। इसके एक फलक का क्षेत्रफल होगा-

- (अ) 25 cm^2 (ब) 30 cm^2
- (स) 5 cm^2 (द) 10 cm^2 (अ)

प्रश्न 9. दो बेलनों के आधार की त्रिज्याओं में 2 : 3 का अनुपात है व ऊँचाई में 5 : 3 का अनुपात है। तो उनके आयतनों में अनुपात होगा -

- (अ) 7 : 6 (ब) 10 : 9
- (स) 4 : 9 (द) 20 : 27 (द)

प्रश्न 10. एक घनाभ में रखी जा सकने वाली बड़ी से बड़ी छड़ की लम्बाई होगी -

- (अ) $\sqrt{ल.^2 + चौ.^2 + ऊ.^2}$ (ब) $\sqrt{ल.+चौ.+ऊ.}$
- (स) $ल.^2+चौ.^2+ऊ.^2$ (द) $ल.+चौ.+ऊ$ (अ)

रिक्त स्थान भरे -

प्रश्न 1. एक वृत्त को उसके व्यास के इर्द-गिर्द घुमाने पर प्राप्त ठोस आकृति को कहते हैं। [उत्तर- गोला]

प्रश्न 2. घन ऐसा घनाभ है जिसके सभी 6 पृष्ठों के क्षेत्रफल

..... होते हैं। [उत्तर- समान / बराबर]

प्रश्न 3. एक घनाभ की विमायें 5 सेमी × 4 सेमी × 3 सेमी है इसका पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा - [उत्तर- 54 सेमी²]

प्रश्न 4. एक अर्द्ध गोले की त्रिज्या 7 सेमी है। इसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा - [उत्तर- 462 सेमी²]

प्रश्न 5. दो गोलों के आयतनों का अनुपात 64:27 है, उनके पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात होगा - [उत्तर- 16:9]

प्रश्न 6. टैंकर, दवा का कैप्सूल या लम्बे गुलाब जामुन ज्यामितिय, आकृतियों का संयोजन है। [उत्तर- अर्द्ध गोल + बेलन + अर्द्धगोला]

प्रश्न 7. शंकू में वृत्ताकार भागों की संख्या होती है। [उत्तर- एक]

प्रश्न 8. आयतन उन्हीं वस्तुओं का होता है जो..... होती है। [उत्तर- त्रिविमिय]

प्रश्न 9. किसी घन का क्षेत्रफल व आयतन समान है तो घन की भुजा होगी। [उत्तर- 6 ईकाई]

[Hints = आयतन = क्षेत्रफल

$$(\text{भुजा})^3 = 6 \times (\text{भुजा})^2$$

अतिलघुतरात्मक प्रश्न -

प्रश्न 1. दो गोलों के आयतनों का अनुपात 64 : 27 है तो उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात है।

हल - माना दोनों गोलों की त्रिज्याएं r_1 व r_2 है अतः इन आयतनों का अनुपात 64 : 27 है।

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \frac{64}{27} \Rightarrow \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{64}{27} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}$$

अतः पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात

$$\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

अतः अभिष्ट अनुपात = 16 : 9

प्रश्न 2. एक बेलन और एक शंकू के आधार तथा ऊँचाईया समान है। उनके आयतनों का अनुपात होगा।

हल - माना शंकू व बेलन के आधार की त्रिज्या r cm व ऊँचाई h है।

$$\text{आयतनों का अनुपात} = \frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{शंकू का आयतन}}$$

$$= \frac{\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3}{1} = 3:1$$

प्रश्न 3. एक ठोस अर्द्ध गोले की त्रिज्या 7 cm है, इसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करो?

हल : $r = 7$ cm

अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल =

$$= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 462 \text{ cm}^2$$

प्रश्न 4. यदि घन का आयतन 64 cm³ हो तो घन की भुजा ज्ञात करो?

हल : घन का आयतन = 64 cm³

$$(\text{भुजा})^3 = 64 \text{ cm}^3 \Rightarrow \text{भुजा} = (64)^{1/3} = 4 \text{ cm}$$

प्रश्न 5. यदि किसी धन की भुजा 4 सेमी हो तो उसमें रखी जा सकने वाली लम्बी से लम्बी छड़ की लम्बाई क्या होगी।

हल : छड़ की लम्बाई = घन का विकर्ण = $\sqrt{2} \times \text{भुजा}$

$$= \sqrt{2} \times 4 = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

प्रश्न 6. यदि किसी घनाभ का परिमाण 10 सेमी व पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = 40 सेमी² हो तो घनाभ की ऊँचाई ज्ञात करो?

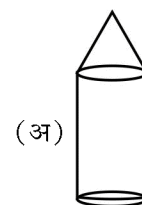
हल : घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल = परिमाण × ऊँचाई

$$40 = 10 \times \text{ऊँचाई}$$

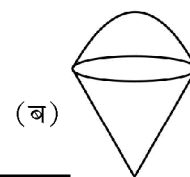
$$\text{ऊँचाई} = \frac{40}{10} = 4 \text{ cm}$$

लघुतरात्मक प्रश्न -

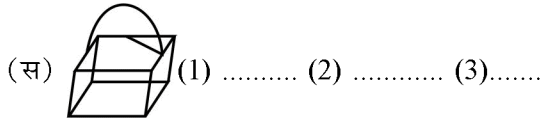
प्रश्न 1. निम्न आकृतियों में संयोजित हो रही विभिन्न ज्यामितिय आकृतियों के नाम लिखो?



(अ) (1) (2) (3).....



(ब) (1) (2) (3).....



प्रश्न 2. कोई बर्तन एक खोखले अर्द्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है। अर्द्धगोले का व्यास 14 सेमी है। और इस बर्तन की कुल ऊँचाई 13 सेमी है। इस बर्तन का आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करो?

हल : अर्द्धगोले का व्यास = बेलन का व्यास = 14 सेमी

$$\Rightarrow \text{त्रिज्या} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

अर्द्धगोले की त्रिज्या = बेलन की त्रिज्या = 7 cm

बर्तन की कुल ऊँचाई = 13 cm

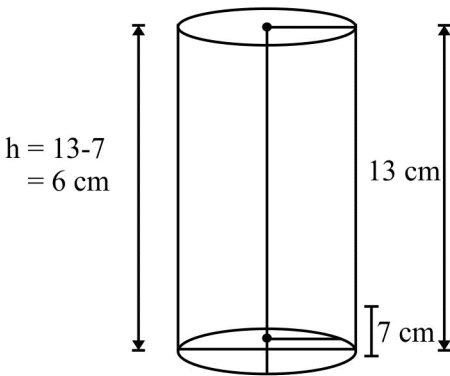
$$\therefore \text{बेलन की ऊँचाई} = (13-7) = 6 \text{ cm}$$

\therefore बर्तन का आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्द्धगोले का आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल

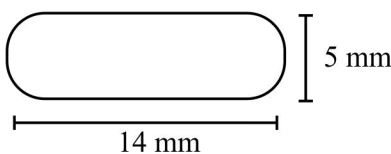
$$= 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H+R)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(6+7) = 44 \times 13 = 572 \text{ सेमी}^2$$

अतः बर्तन का कुल आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल = 572 सेमी²



प्रश्न 3. दवा का एक कैप्सूल एक बेलन के आकार का है। जिसके दोनों छारों पर एक-एक अर्द्ध गोला लगा है। पुरे कैप्सूल की लम्बाई 14 mm है। उसका व्यास 5 mm है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करो?



हल - कैप्सूल का व्यास = अर्द्धगोले का व्यास = बेलन का व्यास

$$= 5 \text{ mm}$$

$$\text{अतः} = 2R = 5 \text{ mm} \quad \Rightarrow R = \frac{5}{2} \text{ mm}$$

कैप्सूल की आन्तरिक लम्बाई = 14 mm

\therefore बेलनाकार भाग की लम्बाई

$$= \left(14 - \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right) = (14 - 5) = 9 \text{ mm}$$

$$\therefore H = 9 \text{ mm}$$

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 × अर्द्धगोलाकार भाग का क्षेत्रफल

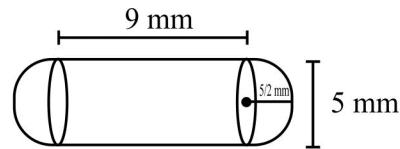
$$= 2\pi RH + 2 \times (2\pi R^2)$$

$$= 2\pi R(H + 2R)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2} \left[9 + 2 \times \frac{5}{2}\right] = \frac{22}{7} \times 5 [9 + 5]$$

$$= \frac{22}{7} \times 5 \times 14 = 110 \times 2 = 220 \text{ mm}^2$$

अतः कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 220 mm²



प्रश्न 4. एक ठोस एक अर्द्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है, जिनकी त्रिज्याएँ 1 सेमी है तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात करो?

हल- यहां शंकु की त्रिज्या = अर्द्ध गोल की त्रिज्या = 1 cm

$$R = 1 \text{ cm}$$

और शंकु की ऊँचाई = (H) = 1 cm

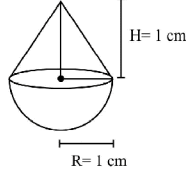
ठोस का आयतन = शंकु का आयतन + अर्द्धगोले का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 [H + 2R] = \frac{1}{3}\pi (1)^2 [1 + 2 \times 1]$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times 3 = \frac{3\pi}{3} = \pi \text{ सेमी}^3$$

∴ ठोस का आयतन = π सेमी³



प्रश्न 5. एक गोलाकार कांच के बर्तन की एक बेलन के आकार की गर्दन है। जिसकी ऊँचाई 8 सेमी है और व्यास 2 सेमी है। जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5 सेमी है। इसमें भरे जा सकने वाले पानी की मात्रा माप कर, एक बच्चे ने यह ज्ञात किया कि बर्तन का आयतन 345 सेमी³ है, ज्ञात करो कि उस बच्चे का उत्तर सही है या नहीं, यह मानते हैं का उपर्युक्त मापन आन्तरिक मापन है और $\pi = 3.14$

हल- गर्दन का व्यास (बेलनाकार भाग) = 2 cm

गर्दन की त्रिज्या (r) = 1 cm

बेलनाकार भाग की ऊँचाई (H) = 8 cm

गोलाकार भाग का व्यास = 8.5 cm

गोलाकार भाग की त्रिज्या = $\frac{8.5}{2} = 4.25$ cm

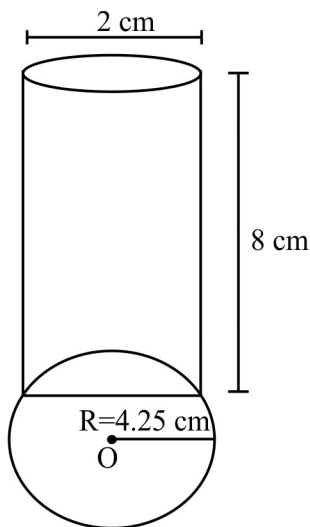
बर्तन में पानी का आयतन = गोले का आयतन + बेलन का

$$\text{आयतन} = \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi r^2 H$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 4.25 \times 4.25 \times 4.25 + 3.14 \times 1 \times 1 \times 8$$

$$= 321.39 + 25.12 = 346.51 \text{ cm}^3$$

बर्तन में पानी का आयतन = 346.51 cm³ है और बच्चे द्वारा दिया गया उत्तर सही नहीं है।



प्रश्न 6. ऊँचाई 220 cm और आधार का व्यास 24 cm वाले एक बेलन जिस पर ऊँचाई 60 cm और त्रिज्या 8 cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का एक स्तम्भ बना है। इस स्तम्भ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए। जबकि दिया है 1 cm³ लोहे का द्रव्यमान लगभग 8 gm होता है। ($\pi = 3.14$)

हल-

नीचे वाले बेलन का व्यास = 24 cm

नीचे वाले बेलन की त्रिज्या (R) = 12 cm

नीचे वाले बेलन की ऊँचाई (H) = 220 cm

ऊपर वाले बेलन की त्रिज्या (r) = 8 cm

ऊपर वाले बेलन की ऊँचाई (h) = 60 cm

स्तम्भ का आयतन = नीचे वाले बेलन का आयतन + ऊपर

वाले बेलन का आयतन = $\pi R^2 H + \pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 12 \times 12 \times 220 + 3.14 \times 8 \times 8 \times 60$$

$$= 99475.2 + 12057.6 = 111532.8 \text{ cm}^3$$

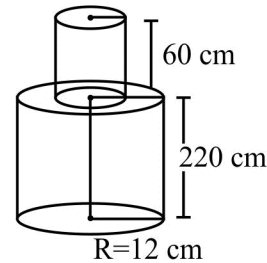
1 cm³ का द्रव्यमान = 8 gm

अतः 111532.8 cm³ का द्रव्यमान = $8 \times 111532.8 =$

$$892262.4 \text{ gm}$$

$$= \frac{892262.4}{1000} = 892.2624 \text{ kg}$$

स्तम्भ का द्रव्यमान = 892.26 kg



प्रश्न 7. भुजा 7 cm वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्द्ध गोला रखा हुआ है। अर्द्ध गोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?

हल -

प्रश्नानुसार - घनाकार ब्लॉक की भुजा = 7 cm

यहाँ अर्द्धगोले का व्यास = घनाकार ब्लॉक की भुजा = 7 cm

$$2R = 7 \text{ cm} \Rightarrow R = 7/2 \text{ cm}$$

अर्द्ध गोले का अधिकतम व्यास = 7 cm

$$\therefore R = 7/2 \text{ cm}$$

ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल - अर्द्धगोले के आधार का क्षेत्रफल + अर्द्ध गोले का वक्र

पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 6 \times (\text{भुजा})^2 - \pi R^2 + 2 \pi R^2$$

$$= 6 \times (\text{भुजा})^2 + \pi R^2$$

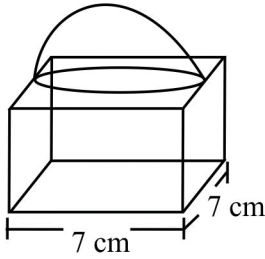
$$= 6 \times (7)^2 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} [\because R = 7/2]$$

$$= 6 \times 49 + 11 \times \frac{7}{2} = (294 + 38.5)$$

$$= 332.5 \text{ cm}^2$$

अतः अर्द्ध गोले का अधिकतम व्यास = 7 cm

तथा ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 332.5 cm²



अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न -

1. लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्द्धगोला खोदकर निकालते हुए, एक वस्तु बनाई जाती है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है। आधार की त्रिज्या 3.5 cm है, तो इस वस्तु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या होगा।
2. एक कलम दान घनाभ के आकार की एक लकड़ी से बना है जिसमें कलम रखने के लिए चार शंक्वाकार गड्ढे बने हुए हैं। घनाभ की विमाएं 15 cm × 10 cm × 3.5 cm है। प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5 cm है व गहराई 1.4 cm है, पूरे कलम दान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए।
3. एक मॉडल एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरो पर दो शंकु जुड़े हुए हैं, इस मॉडल का व्यास 3 cm व लम्बाई 12 cm है। यदि शंकु की ऊँचाई 2 cm हो, तो मॉडल में अन्तर्विष्ट हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। (आन्तरिक व बाहरी विमाएं लगभग बराबर है।)



शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें।

अध्याय

13

सांख्यिकी

अंकभार : 13, वस्तु निष्ठ -2 (प्रत्येक 1 अंक), रिक्त स्थान- 2 (प्रत्येक 1 अंक), लघुतरात्मक - 1 (2 अंक), दीर्घउत्तरात्मक - 1 (3 अंक), निबंधात्मक - 1 (4 अंक)

- ❖ **केन्द्रीय प्रवृत्ति** - दिए गए आँकड़ों से श्रेणी के अधिकांश पद जिस आँकड़े के आस-पास केन्द्रित होते हैं, उन आँकड़ों को केन्द्रीय प्रवृत्ति कहते हैं। इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप अथवा माध्य भी कहा जाता है। ये तीन प्रकार के होते हैं -

- (i) माध्य
(ii) बहुलक
(iii) माध्यक

- ❖ **समान्तर माध्य** - यदि किसी चर राशि के x मान क्रमशः x_1, x_2, x_3 हो तो उनका समान्तर माध्य होगा -

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{या } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

- ❖ **माध्य** - यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ की बारम्बारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ हो, तो इन सभी प्रेक्षणों के मानों का योग $= f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \dots + f_nx_n$ है तथा प्रेक्षणों की संख्या $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n$ है तब

$$(\bar{x}) \text{ माध्य} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n} \text{ है तथा}$$

प्रत्यक्ष विधि से माध्य:-

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \text{ जहाँ } i=1 \text{ से } n \text{ तक विचरण करता}$$

है।

वर्ग चिह्न या माध्य बिन्दु:-

$$\text{वर्ग चिह्न } (x) = \frac{\text{उपरी वर्ग सी मा } + \text{ निचली वर्ग सी मा}}{2}$$

$$\text{कल्पित माध्य विधि } (\bar{x}) = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

a = कल्पित माध्य

$$d_i = X_i - a$$

$$\sum f_i = N = \text{बारम्बारताओं का योग}$$

पग- विचलन विधि :- इस विधि में विचलनों $d_i = x_i - a$ के सभी मानों को किसी एक उभयनिष्ठ संख्या (माना h) से भाग देते हैं। इन सभी विचलनों को h से विभाजित करते हुए नये विचलन

$$u_i = \left(\frac{\bar{x}}{h}\right) = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{162}{20} = 8.1 \text{ के रूप में लेते हैं}$$

$$\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$$

a = कल्पित माध्य

h = वर्ग माप

दिप्पणी - जब x के मानों में अन्तर अधिक तथा मान बड़ा हो या बारम्बारता अधिक हो तो गणना की सरलता के लिये पद

विचलन $u = \frac{x - a}{h}$ काम में लेना सुविधाजनक होता है।

वस्तुनिष्ठ एवं रिक्त स्थान प्रश्न -

प्रश्न 1. यदि 6, 8, 9, x तथा 13 का माध्य 10 हो तो x का मान होगा।

- (a) 12 (b) 13
(c) 14 (d) 15 (c)

$$\text{हल : } \frac{6+8+9+x+13}{5} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{x+36}{5} = \frac{10}{1}$$

$$\Rightarrow x+36 = 10 \times 5$$

$$\Rightarrow x = 50 - 36$$

$$\Rightarrow x = 14$$

प्रश्न 2. वर्ग अन्तराल 24-30 का वर्ग चिह्न होगा-

- (a) 16 (b) 27
(c) 30 (d) 24 (b)

हल : $\frac{24+30}{2} = \frac{54}{2} = 27$

प्रश्न 3. संख्याओं 1, 2, 3, 4, n का माध्य है-

हल : $\frac{n+1}{2}$

प्रश्न 4. आँकड़ों 8, 6, 12, 4, 13, 20, 7, 2, 3, 3, 10 में परिसर होगा-

हल : परिसर = अधिकतम आँकड़ा - न्यूनतम आँकड़ा
परिसर = 20 - 2 = 18

प्रश्न 5. प्रथम पाँच विषय संख्याओं का माध्य है-

हल : प्रथम पाँच विषय संख्याएँ - 1, 3, 5, 7, 9

माध्य = $\frac{1+3+5+7+9}{5} = \frac{25}{5} = 5$ Ans.

प्रश्न 6. प्रथम 10 सम प्राकृतिक संख्याओं का माध्य है-

हल : प्रथम 10 सम प्राकृतिक संख्याएँ -

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

माध्य = $\frac{2+4+6+8+10+12+14+16+18+20}{10}$

= $\frac{110}{10}$

= 11 Ans.

प्रश्न 7. यदि निम्न बटन का माध्य 5 है, तो P का मान है-

x	2	4	6	P
f	3	2	1	4

हल :

x	f	fx
2	3	6
4	2	8
6	1	6
P	4	4P
योग	10	20+4P

माध्य = $\frac{\sum fx}{\sum f}$

$\frac{5}{1} = \frac{20+4P}{10}$

$\Rightarrow 20+4P = 50$

$\Rightarrow 4P = 50 - 20$

$\Rightarrow 4P = 30$

$\Rightarrow P = \frac{30}{4} = 7.5$

प्रश्न 8. x, x+3, x+6, x+9 तथा x+12 का समान्तर माध्य है-

हल : माध्य = $\frac{x+(x+3)+(x+6)+(x+9)+(x+12)}{5}$

माध्य = $\frac{x+x+3+x+6+x+9+x+12}{5}$

= $\frac{5x+30}{5} = \frac{5(x+6)}{5}$

= x + 6 Ans.

प्रश्न 9. यदि प्रेक्षणों x, x_2, x_3, \dots, x_n की बारम्बारताएँ क्रमशः f_1, f_2, f_3, f_n हों, तब समान्तर माध्य होगा।

हल : = $\frac{\sum fx}{\sum f}$

प्रश्न 10. किसी श्रेणी का सर्वाधिक बारम्बारता मूल्य कहलाता है।

हल : बहुलक

प्रश्न 11. संचयी बारम्बारता सारणी का उपयोग ज्ञात करने में होता है।

हल : माध्यक

प्रश्न 12. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य ज्ञात करने का सूत्र $\bar{x} = \dots\dots\dots$ है।

हल : = $\frac{\sum f_1 x_1}{\sum f_1}$

प्रश्न 13. यदि x_1 वर्गीकृत आँकड़ों के वर्ग अन्तरालों के मध्य बिन्दु हैं, x_1 इनकी संगत बारम्बारताएँ है तथा \bar{x} माध्य है, तो $\sum (f_1 x_1 - \bar{x})$ का मान होगा।

हल : शून्य

प्रश्न 14. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यम ज्ञात करने का सूत्र..... है।

अभ्यास प्रश्न

लघूत्तरात्मक

हल : $L + \left(\frac{\frac{n}{2} - C.f.}{f} \right) \times h$

प्रश्न15. वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने का सूत्र..... है।

हल : $L + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$

प्रश्न16. निम्न में कौनसी केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप नहीं है-

- (अ) माध्य
- (ब) माध्यक
- (स) बहुलक
- (द) मानक विचलन

हल : सही विकल्प (द) है।

प्रश्न17. दिए गए सूत्र $\bar{x} = a + h \left(\frac{\sum f_i U_i}{\sum f_i} \right)$ में U_i का मान होगा-

हल : $U_i = \frac{x_i - a}{h}$ होता है।

प्रश्न18. सांख्यिकी आँकड़ों के औसत को कहते हैं।

हल : समान्तर माध्य

प्रश्न19. प्रथम पाँच पूर्ण संख्याओं का माध्य है।

हल : $\text{माध्य} = \frac{0+1+2+3+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$

प्रश्न20. यदि कोई प्रेक्षण वर्ग की उच्च सीमा में आता है, तो उसे अगले में लेते हैं।

हल : अन्तराल

प्रश्न21. A, B, C, D का गणितीय माध्य होगा।

हल : $= \frac{A+B+C+D}{4}$

प्रश्न22. आलेख द्वारा निर्धारित नहीं किया जा सकता है।

हल : माध्य

1. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

x	20	40	30	50	60	70	80
f	6	11	7	4	4	2	1

हल.

x (चर)	बारम्बारता (f)	fx
20	6	120
30	11	330
40	7	280
50	4	200
60	4	240
70	2	140
80	1	80
योग	$\sum f = 35$	$\sum fx = 1390$

माध्य = $\frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1390}{35} = 39.71$ (लगभग मान)

2. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए -

x	1	2	3	4	5	6
f	2	4	5	4	2	2

हल.

x	f	fx
1	2	2
2	4	8
3	5	15
4	4	16
5	2	10
6	2	12
योग	$\sum f = 19$	$\sum fx = 63$

माध्य = $\frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{63}{19} = 3.315$

अभ्यास हेतु प्रश्न - 3 व 4

3. निम्न बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए -

x	5	6	7	8	9
f	4	8	14	11	3

4. निम्न बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए -

प्राप्तिक	25	35	45	55	65
छात्रों की संख्या	4	28	42	20	6

5. निम्न बारम्बारता का बटन से माध्य ज्ञात कीजिए -

भार (kg में)	40-44	44-48	48-52	52-56	56-60	60-64
व्यक्तियों की संख्या	5	6	5	9	3	2

हल.	भार (kg में)	f	मध्यमान x (वर्ग चिह्न)	fx
	40-44	5	42	210
	44-48	6	46	276
	48-52	5	50	250
	52-56	9	54	486
	56-60	3	58	174
	60-64	2	62	124

$$\sum f = 30 \quad \sum fx = 1520$$

$$\text{माध्य } \bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1520}{30} = 50.67 \text{ kg}$$

6. यदि निम्नलिखित बारम्बारता बटन का माध्य 7.5 हो तो P का मान ज्ञात करो-

x	3	5	7	9	11	13
f	6	8	15	P	8	4

हल.

x	f	fx
3	6	18
5	8	40
7	15	105
9	P	9P
11	8	88
13	4	52

$$\sum f = n \quad \sum fx$$

$$= 41 + P \quad = 303 + 9P$$

$$\text{माध्य} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\frac{7.5}{1} = \frac{303 + 9P}{41 + P}$$

$$7.5 \times (41 + P) = 303 + 9P$$

$$307.5 + 7.5P = 303 + 9P$$

$$1.5P = 4.5$$

$$P = \frac{4.5}{1.5} = 3$$

7. निम्नलिखित वर्गीकृत आंकड़ों का कल्पित माध्य विधि द्वारा ज्ञात कीजिए-

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	2	5	8	4	1

हल.

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता f	माध्यमान (x)	d = x - a	fxd
0-10	2	5	5-25 = -20	-20 × 2 = -40
10-20	5	15	15-25 = -10	-10 × 5 = -50
20-30	8	a=25(माना)	25-25=0	0 × 8 = 0
30-40	4	35	35-25=10	10 × 4 = 40
40-50	1	45	45-25=20	20 × 1 = 20

$$\sum f = 20$$

$$\sum fxd = -30$$

माना कल्पित माध्य = 25

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = a + \frac{\sum fxd}{\sum f} = 25 + \left(\frac{-30}{20} \right)$$

$$= 25 - \frac{3}{2} = \frac{25}{1} - \frac{3}{2} = \frac{50-3}{2} = \frac{47}{2} = 23.5$$

8. बटन 10, 12, 8, 7, 13 का माध्य ज्ञात करें।

$$\text{अभीष्ट माध्य} = \frac{10+12+8+7+13}{5}$$

$$\text{माध्य} = \frac{50}{5} = 10$$

9. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ का माध्य A है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल.
$$A = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}{n}$$

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{n} \quad (i=1 \text{ से } n \text{ तक })$$

अभ्यास हेतु प्रश्न

10. निम्न बारम्बारता बटन का माध्य 50 हो तो x व y के मान ज्ञात कीजिए-

वर्गअन्तराल	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	योग
बारम्बारता	17	x	32	y	19	120

11. निम्नलिखित बटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जब खर्च दर्शाता है। माध्य जब खर्च 18 है। लुम बारम्बारता f ज्ञात कीजिए-

दैनिक जब भत्ता (रु. में)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न व निबन्धात्मक प्रश्न

1. विद्यार्थियों के एक समूह का द्वारा अपने पर्यावरण संचेतना अभियान के अन्तर्गत एक सर्वेक्षण किया गया, जिसमें उन्होंने एक मोहल्ले के 20 घरों में लगे हुए पौधों से सम्बन्धित निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित किए, प्रति घर पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

पौधों की संख्या	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

माध्य ज्ञात करने के लिए आपने किस विधि का प्रयोग किया और क्यों?

हल.	पौधों की संख्या	घरों की संख्या	वर्ग चिह्न	
		f_i	x_i	$f_i x_i$
	0 - 2	1	1	1
	2 - 4	2	3	6
	4 - 6	1	5	5
	6 - 8	5	7	35
	8 - 10	6	9	54
	10 - 12	2	11	22
	12 - 14	3	13	39
	योग	$\sum f_i = 20$	$\sum f_i x_i = 162$	

$$\text{माध्य पौधे } (\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{162}{20} = 8.1$$

अतः माध्य ज्ञात करने के लिए प्रत्येक विधि का प्रयोग करेंगे, क्योंकि पौधों की संख्या व घरों की संख्या मानों में कम है।

अभ्यास हेतु प्रश्न:-

1. किसी फैक्ट्री के 50 श्रमिकों की दैनिक मजदूरी के निम्नलिखित बटन पर विचार कीजिए -

दैनिक मजदूरी (रु.में)	500-520	520-540	540-560	560-580	580-600
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए, इस फैक्ट्री के श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिए।

2. निम्नलिखित सारणी 35 नगरों की साक्षरता दर (प्रतिशत में) दर्शाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए:-

साक्षरता दर (% में)	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

❖ बहुलक:- दिए हुए प्रेक्षणों में बहुलक का वह मान है जो सबसे अधिक बार आता है अर्थात उस प्रेक्षण का मान जिसकी बारम्बारता अधिकतम हो, बहुलक कहलाता है।

$$\text{बहुलक} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

यहाँ:-

L = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

h = वर्ग अंतराल की माप

f_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारम्बारता

अभ्यास प्रश्न

1. किसी श्रेणी का बहुलक मूल्य होता है-

(1) मध्यवर्मी मूल्य

(2) सर्वाधिक बारम्बारता वाला मूल्य

(3) न्यूनतम बारम्बारता मूल्य

(4) सीमांत मूल्य (2)

2. बंटन 7, 3, 3, 4, 7, 5, 1, 4, 6, 2, 4 का बहुलक है-

उत्तर (चार की बारम्बारता सर्वाधिक तीन बार है।) अतः बहुलक = 4

3. निम्न का बहुलक ज्ञात करें -

x	5	7	9	11
f	4	8	6	2

उत्तर 7 की बारम्बारता सर्वाधिक 8 बार है। अतः बहुलक = 7

4. बारम्बारता बटन के माध्य, माध्यक तथा बहुलक के बीच सम्बन्ध होता है:-

उत्तर बहुलक = 3 माध्यक - 2 माध्य

5. एक बंटन का बहुलक तथा माध्य क्रमशः 17 व 14 है तो माध्यक का मान है

उत्तर बहुलक = 3 माध्यक - 2 माध्य

$$17 = 3 \text{ माध्यक} - 2 \times 14$$

$$\text{माध्यक} = \frac{17 + 28}{3} = \frac{45}{3} = 15$$

6. एक पौधे से 75 पत्तियों की लम्बाइयाँ निकटतम मिली मीटरों में मापी जाती है तथा प्राप्त आंकड़ों को निम्नलिखित सारणी के रूप में निरूपित किया जाता है-

लम्बाई (mm)	1-9	11-19	21-29	31-39	41-49	51-59
पत्तियों की संख्या	6	10	12	22	17	8

पत्तियों की लम्बाई का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल. दिये गये आंकड़ों में अधिकतम बारम्बारता 22 है और इसकी संगत वर्ग अन्तराल 31-39 है।

इसलिए बहुलक वर्ग = 31-39

अतः L = 31

$f_1 = 22, f_0 = 12, f_2 = 17$ और $h = 8$

$$\text{बहुलक} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

$$= 31 + \left[\frac{22 - 12}{2 \times 22 - 12 - 17} \right] \times 8$$

$$= 31 + \left[\frac{10}{44 - 29} \right] \times 8$$

$$= 31 + \frac{80}{15}$$

$$= 31 + 5.33$$

$$= 36.33 \text{ mm}$$

7. निम्नलिखित आंकड़ों 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवन काल (घंटों में) की सूचना देते हैं।

जीवनकाल 0-20 20-40 40-60 60-80 80-100 100-120 (घंटों में)

बारम्बारता 10 35 52 61 38 29

उपकरणों का बहुलक जीवनकाल ज्ञात कीजिए।

हल. बहुलक वर्ग = 60-80

$L=60, f_1=61, f_0=52, f_2=38, h=20$

$$\text{बहुलक} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right] \times h$$

$$= 60 + \left[\frac{61 - 52}{2(61) - 52 - 38} \right] \times 20$$

$$= 60 + \left[\frac{9}{122 - 90} \right] \times 20$$

$$= 60 + \frac{9}{32} \times 20$$

$$= 65.625$$

❖ माध्यक या माध्यिका:-

(A) यदि किसी चर राशि x के मानों को आरोही क्रम में रखा जाये, तो इस श्रेणी के मध्यपद को श्रेणी की माध्यिका या माध्यक कहते हैं।

(i) यदि पदों की संख्या विषय है-

$$\text{माध्य (M)} = \left(\frac{n+1}{2} \right) \text{वाँ पद}$$

(ii) यदि पदों की संख्या सम है तो

$$\text{माध्यक (M)} = \frac{\frac{n}{2} \text{वाँ पद} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \text{वाँ पद}}{2} \text{ होगी।}$$

(B) अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक ज्ञात करना -

(i) संचयी बारम्बारता सारणी बनाना

(ii) $\frac{N}{2}$ का मान ज्ञात करना जहाँ $N = \sum f_i$

(iii) $\frac{N}{2}$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता वाला चर मान माध्यक होगा।

(C) वर्गीकृत बारम्बारता बंटन से माध्यक -

(i) संचयी बारम्बारता सारणी बनाना

(ii) $\frac{N}{2}$ ज्ञात कर ठीक अधिक संचय बारम्बारता वाले वर्ग अन्तराल को ज्ञात करना

$$(iii) \text{ माध्यक} = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - \text{c.f.}}{f} \right) \times h$$

यहाँ L = माध्यक वर्ग की निम्न सीमा
N = प्रक्षेपों की संख्या
C.f. = माध्यक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारम्बारता
f = माध्यक वर्ग की बारम्बारता, h = वर्ग माप है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न :-

1. बंटन 2,3,4,7,5,1 का माध्यक है।

हल. पदों की संख्या सम है अतः माध्यक

$$\frac{\frac{n}{2} \text{ वाँ पद} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \text{ वाँ पद}}{2}$$

पदों को आरोही क्रम में लिखने पर

1, 2, 3, 4, 5, 7

$$= \frac{\frac{6}{2} \text{ वाँ पद} + \left(\frac{6}{2} + 1 \right) \text{ वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{3 \text{ वाँ पद} + 4 \text{ वाँ पद}}{2}$$

$$= \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \text{ माध्यक} = 3.5$$

2. बंटन 7, 4, 6, 3, 8, 5, 9 की माध्यक होगी।

हल. पदों की संख्या विषम है अतः माध्यक

$$\frac{N+1}{2} \text{ वाँ पद होगा।}$$

पदों को आरोही क्रम में लिखने पर

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$$\frac{7+1}{2} \text{ वाँ पद} = \frac{8}{2} \text{ वाँ पद} = 4 \text{ वाँ पद माध्यक}$$

अतः माध्य = 6 होगा

3. निम्न बंटन में P का मान लिखिए -

x	10	15	20	25	30
f	2	5	P	3	2
c.f.	2	7	10	13	15

हल:- $10 - P = 7$ अतः $P = 10 - 7 = 3$

4. निम्न तालिका से a का मान लिखिए -

x	20	25	30	35	40	45	50
f	2	8	10	13	5	3	1
c.f.	2	10	20	33	a	41	42

हल. $a = 33 + 5 = 38$ Ans

5. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात करना है जो एक परीक्षा में 100 विद्यार्थियों द्वारा 50 में से प्राप्त अंक देते हैं।

प्राप्तांक	20	23	28	33	42	38	43	25
विद्यार्थियों की संख्या	6	28	24	15	2	4	1	20

हल. सर्वप्रथम प्राप्त अंकों को आरोही क्रम में लिखना

प्राप्तांक	वि. की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता c.f.
20	6	6
25	20	6+20=26
28	24	26+24=50
29	28	50+28=78
33	15	78+15=93
38	4	93+4=97
42	2	97+2=99
43	1	99+1=100

योग	100	
-----	-----	--

पदों की संख्या सम अतः $\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$ वाँ प्रेक्षण (c.f.)

28, 50+1=51 वाँ प्रेक्षण (c.f.) = 29

$$\text{माध्यक} = \frac{28+29}{2} = \frac{57}{2} = 28.5$$

माध्यक अंक 28.5 सूचित करता है कि लगभग 50 प्रतिशत विद्यार्थियों ने 28.5 से कम अंक और दूसरे अन्य 50 प्रतिशत विद्यार्थियों ने 28.5 से अधिक अंक प्राप्त किए।

6. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए -

वर्ग	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
fi	6	20	44	26	3	1

हल.

वर्ग	fi	संचयी बारम्बारता (c.f.)
10-25	6	6
25-40	20	26
40-55	44	70
55-70	26	96
70-85	3	99
85-100	1	100
योग	N=100	

$$N = 100 \text{ तो } \frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

जो कि वर्ग अन्तराल 40-55 में स्थित है।

माध्यक वर्ग = 40-55

अतः L = 40

f = 44, c.f. = 26, h = 15

$$\text{माध्यक} = 40 + \left(\frac{50-26}{44} \right) \times 15$$

$$= 40 + \frac{24}{44} \times 15$$

$$= 40 + 8.18$$

$$= 48.18$$

7. यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो तो x और y

के मान ज्ञात कीजिए -

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
0-10	5
10-20	x
20-30	20
30-40	15
40-50	y
50-60	5
योग	60

हल.

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता(c.f.)
0-10	5	5
10-20	x	5+x
20-30	20	25+x
30-40	15	40+x
40-50	y	40+x+y
50-60	5	45+x+y
योग	N = 60	45+x+y = 60 = x+y = 15 x=8, 8+y = 15 y = 15-8=7

$$N = 60$$

$$\frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

बंटन का माध्यक 28.5 जो कि वर्ग अन्तराल 20-30 में स्थित है।

माध्यक वर्ग 20-30

L = 20, f = 20, c.f. = 5+x, h = 10

$$\text{माध्यक} = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - \text{c.f.}}{f} \right) \times h$$

$$28.5 = 20 + \left[\frac{30 - (5+x)}{20} \right] \times 10$$

$$\Rightarrow 28.5 = 20 + \left(\frac{30-5-x}{20} \right) \times 10$$

$$\Rightarrow 28.5 = 20 + \frac{25-x}{2}$$

$$\Rightarrow 28.5 - 20 = \frac{25 - x}{2}$$

$$\Rightarrow 8.5 = \frac{25 - x}{2}$$

$$\Rightarrow 17 = 25 - x$$

$$\Rightarrow x = 8, y = 7$$

अभ्यास हेतु प्रश्न:-

- निम्नलिखित बारंबारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इन आँकड़ों के माध्यक, माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए। इनकी तुलना कीजिए।

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या
65-85	4
85-105	5
105-125	13
125-145	20
145-165	14
165-185	8
185-205	4

- क्रिकेट की एक टीम के खिलाड़ियों द्वारा बनाए गये रनों की संया निम्न प्रकार है-

57, 17, 26, 91, 115, 26, 83, 41, 57, 0, 26

इसका माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

- निम्नलिखित सारणी एक स्कूल की कक्षा X के 50 विद्यार्थियों के गणित में प्राप्त अंकों को दर्शाती है-

प्राप्तांक	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थियों की संख्या	5	9	8	12	13	1

इन आँकड़ों का माध्य, बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए।

- एक पौधे से 40 पत्तियों की लम्बाइयाँ निकटतम मिली मीटरों में मापी जाती है तथा प्राप्त आँकड़ों को निम्नलिखित सारणी के रूप में निरूपित किया जाता है-

लम्बाई (mm में)	पत्तियों की संख्या
118-126	3
127-135	5
136-144	9
145-153	12
154-162	5
163-171	4
172-180	2

पत्तियों की माध्यक लम्बाई ज्ञात कीजिए।

- संकेत:- माध्यक ज्ञात करने के लिए आँकड़ों को सतत वर्ग अन्तरालों में बदलना पड़ेगा।

तब ये वर्ग अन्तराल 117.5-126.5, 126.5-135.5,..... , 171.5-180.5 में बदल जाते हैं।

- एक जीवन बीमा एजेंट 100 पॉलिसी धारकों की आयु के बंटन के निम्नलिखित आँकड़ों ज्ञात करता है, माध्यक आयु परिकलित कीजिए, यदि पॉलिसी केवल उन्ही व्यक्तियों को दी जाती है, जिसकी आयु 18 वर्ष या उससे अधिक हो, परन्तु 60 वर्ष से कम हो।

आयु वर्षों में	पॉलिसी धारकों की संख्या (e.f.) बनी हुई है	f.(पॉलिसी धारकों की संख्या)
20 से कम	2	2
25 से कम	6	6-2=4
30 से कम	24	24-6=18
35 से कम	45	45-24=21
40 से कम	78	78-45=33
45 से कम	89	89-78=11
50 से कम	92	92-89=3
55 से कम	98	98-92=6
60 से कम	100	100-98=2
योग		N=100



अध्याय

14

प्रायिकता

अंकभार : 4, वस्तु निष्ठ -1 (1 अंक), रिक्तस्थान - 1 (1 अंक), लघुत्तरात्मक - 1 (2 अंक)

- ❖ किसी घटना को घटित होने पर संभावना का संख्यात्मक रूप ही प्रायिकता है।
- $$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}}$$
- ❖ $P(A)$ - घटना A के घटित होने की प्रायिकता
- ❖ $P(\bar{A})$ - घटना A के घटित नहीं होने की प्रायिकता
- ❖ $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, जहां $P(\bar{A}) = 'A \text{ नहीं}'$ को व्यक्त करता है
- $$P(\bar{A}) - P(\text{not}A)$$
- ❖ $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- ❖ किसी प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग 1 होता है।
- ❖ किसी असंभव घटना की प्रायिकता शून्य (0) होगी।
- ❖ किसी निश्चित घटना की प्रायिकता 1 होगी।
- ❖ सभी प्रायिकताओं का मान 0 से अधिक या बराबर और 1 से कम या बराबर होता है।
- $$0 \leq P(A) \leq 1$$
- ❖ ताश के पत्ते (कार्ड) से संबंधित प्रश्न -
- * ताश की गड्डी में कुल पत्तों की संख्या = 52
- * ये 52 पत्ते 4 समूह में विभाजित होते हैं-
- (i) हुकुम = 13 कार्ड (काले रंग के कार्ड)
- (ii) पान = 13 कार्ड (लाल रंग के पत्ते)
- (iii) ईंट = कार्ड (लाल रंग के)
- (iv) चिड़ी = 13 कार्ड (काले रंग के)
- ❖ प्रत्येक समूह में तेरह पत्ते (कार्ड) होते हैं।
- ❖ लाल रंग के पत्ते = 26
- ❖ फसे कार्ड/मुख/तस्वीर कार्ड = 12 (4+4+4) कार्ड
- ❖ बादशाह = 04
- ❖ बेगम = 04
- ❖ गुलाम = 4
- ❖ इक्का = 04 (फेस/मुख/तस्वीर/कार्ड में नहीं होता है।)
1. ताश के 52 पत्तों की एक भली भांति फेंटी गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया है। निकले गए पत्ते की प्रायिकता ज्ञात करो।
- यदि -
- (A) पता फेस/तस्वीर वाला हो
- (B) लाल रंग का पता
- (C) एक इक्का हो
- (D) पान का गुलाम
- (E) हुकुम का पता
- (F) एक ईंट का पता
- (G) लाल रंग का बादशाह
- (H) पता पान का न हो
- उत्तर -
- (A) कुल परिणाम = 52
पता फेस (तस्वीर) वाला होने के अनुकूल परिणाम = 12
अतः प्रायिकता = $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$
- (B) लाल रंग के पत्ते होने के अनुकूल परिणाम = 26
निकाला गया पता लाल रंग के होने की प्रायिकता = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
- (C) इक्का होने के अनुकूल परिणाम = 4
इक्का होने की प्रायिकता = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
- (D) पान का गुलाम होने के अनुकूल परिणाम = 1
पान का गुलाम होने की प्रायिकता = $\frac{1}{52}$
- (E) हुकुम के पत्ते = 13
हुकुम का पता प्राप्त करने की प्रायिकता = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(F) ईंट के पते = 13

$$\text{ईंट की बेगम प्राप्त करने की प्रायिकता} = \frac{1}{52}$$

(G) लाल रंग के बादशाह होने के अनुकूल परिणाम = 2

$$\text{लाल रंग के बादशाह होने की प्रायिकता} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

(H) पता पान का न होने के अनुकूल परिणाम = $52 - 13 = 39$

$$\text{निकाला गया पता पान का न होने की प्रायिकता} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$$

❖ निम्नलिखित में से कौन सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती है?

- (1) $\frac{2}{3}$ (2) -1.5
(3) 0.7 (4) 0.5 (2)

❖ दिया हुआ है कि 3 विद्यार्थियों के एक समूह में से 2 विद्यार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन न होने की प्रायिकता 0.992 है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इन 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन हो?

उत्तर - $P(\bar{E}) = 0.992$

$$\begin{aligned} \because P(\bar{E}) + P(E) &= 1 \\ \Rightarrow P(E) &= 1 - P(\bar{E}) \\ &= 1 - 0.992 = 0.008 \end{aligned}$$

पासे से संबंधित प्रश्न -

❖ एक पासे को n बार / n पासों को एक बार उछालने पर कुल संभव परिणाम = 6^n

❖ एक पासे को एक बार उछालने पर कुल संभव परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5, 6

❖ कुल परिणाम = 06
सम संख्या = 2, 4, 6
विषम संख्या = 1, 3, 5
अभाज्य संख्या = 2, 3, 5
भाज्य संख्या = 4, 6

❖ एक पासे को एक बार फेंका जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए-

- (i) एक अभाज्य संख्या
(ii) 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या

(iii) एक विषय संख्या

उत्तर - जब पासे को एक बार फेंका जाता है तो संभव परिणाम हैं-
1, 2, 3, 4, 5, 6 = 6

(i) अभाज्य संख्याएं हैं-

$$2, 3, 5 = 3$$

$$\text{अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) 2 और 6 के बीच स्थित संख्याएं = 3, 4, 5

3 और 6 के बीच स्थित संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(iii) विषम संख्याएं हैं-

$$1, 3, 5$$

$$\text{एक विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

एक पासे को दो बार उछालने पर संभावित कुल परिणाम कितने होंगे?

हल : $6^2 = 6 \times 6 = 36$

❖ पासे को दो बार उछालने पर इसकी क्या प्रायिकता होगी कि प्राप्त संख्याएं -

- (i) 5 किसी भी बार में नहीं आएगा।
(ii) 5 कम से कम एक बार आएगा
(iii) युग्मक (द्विक) संख्याएं हो
(iv) योग 8 है।

उत्तर - कुल परिणाम = 36

(i) 5 किसी भी बार में न आये घटना के अनुकूल परिणाम =

$$(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,6)$$

$$\text{कुल} = 25$$

$$\text{घटना के 5 एक भी बार न आने की प्रायिकता} = \frac{25}{36}$$

(ii) 5 कम से कम एक बार आने के अनुकूल परिणाम =

$$(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,5) \text{ कुल} = 11$$

5 कम से कम एक बार आएगा की प्रायिकता = $\frac{11}{36}$

(iii) युग्मक संख्याएँ
(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) कुल = 06

युग्मक संख्याएँ प्राप्त होने की प्रायिकता = $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(iv) योग 8 प्राप्त हो इस घटना के अनुकूल परिणाम
(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) कुल = 05

प्राप्त संख्याओं का योग 8 होने की प्रायिकता = $\frac{5}{36}$

सिक्के से संबंधित प्रश्न -

❖ एक सिक्के को n बार/ n सिक्कों को एक बार उछालने पर
उत्तर- कुल परिणाम = 2^n

❖ एक सिक्के को दो बार उछालने पर कुल परिणाम लिखो।
उत्तर- $2^2 = 2 \times 2 = 4$ (HH, TT, TH, HT)

प्रश्न 1. एक पासे को 1 बार उछालने पर अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर- $\frac{3(2,3,5)}{6} = \frac{1}{2}$

प्रश्न 2. एक सिक्के को एक बार उछालने पर चित (H) आने की प्रायिकता क्या होगी?

उत्तर- संभावित परिणाम = चित (H), पट (T)
कुल परिणाम = 02

P (H) चित आने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 3. एक सिक्के को दो बार उछालने पर दोनों पर पट (T) आने की प्रायिकता ज्ञात करो।

उत्तर- कुल परिणाम = 04
अनुकूल परिणाम = TT
कुल = 01

$$\text{अभिष्ट प्रायिकता} = \frac{1}{4}$$

प्रश्न 4. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर इनकी क्या प्रायिकता है। कि कम से कम एक चित प्राप्त हो?

उत्तर- कुल परिणाम = 04 (HH, TT, HT, TH)

अनुकूल परिणाम = HT, TH, HH

अनुकूल परिणाम = 03

$$P(E) = \frac{3}{4}$$

प्रश्न 5. एक लीप वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं।

52 पूर्ण सप्ताह अर्थात् $52 \times 7 = 364$ दिन

शेष दिन = 02

इन दो दिनों की संभावनाएं निम्न हो सकती हैं-

(रविवार, सोमवार), (सोमवार, मंगलवार), (मंगलवार, बुधवार), (बुधवार, गुरुवार), (गुरुवार, शुक्रवार), (शुक्रवार, शनिवार), (शनिवार, रविवार)

अतः कुल परिणाम = 07

इन 7 स्थितियों में रविवार आने के अनुकूल परिणाम = 02

अतः लीप वर्ष में 53 रविवार आने की प्रायिकता = $\frac{02}{07} = \frac{2}{7}$

प्रश्न 6. कुल पेनों की संख्या 144 जिसमें से खराब पेन 12 और अच्छे 132 हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। इस मिश्रण में से, एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गए पेन की अच्छा होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर - खराब पेनों की संख्या = 12

अच्छे पेनों की संख्या = 132

पेनों की कुल संख्या = $12 + 132 = 144$

अच्छा पेन प्राप्त करने की प्रायिकता = $\frac{132}{144} = \frac{11}{12}$

❖ एक बच्चे के पास ऐसा पासा है जिसके फलकों पर निम्नलिखित अक्षर अंकित हैं-

[A | B | C | D | E | A] इस पासे को एक बार फेंका जाता है इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) A प्राप्त हो?

(ii) D प्राप्त हो?

उत्तर - कुल फलक = 6

(i) A प्राप्त करने की प्रायिकता = $\frac{2}{6}$ [∵ A दो फलकों पर]

(ii) D प्राप्त करने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$ [\because D एक फलक पर]

अभ्यास प्रश्न -

1. यदि $P(E) = 0.05$ है, तो E नहीं या $P(\bar{E})$ की प्रायिकता क्या है?
2. यदि किसी के जीतने की प्रायिकता 0.07 है, तो उसके हारने की प्रायिकता क्या होगी। होने की प्रायिकता है।
3. यादृच्छिक रूप से चुने गये एक ऐसे वर्ष में, जो अधिवर्ष न हो 53 रविवार होने की प्रायिकता क्या होगी?
4. अच्छी प्रकार से फेटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक इक्का नहीं होने की प्रायिकता है।
5. दो सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं, अधिक से अधिक एक चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
6. दो भिन्न पासों को एक साथ उछाला गया। दोनों पासों के ऊपरी तलों पर आई संख्याओं का गुणनफल 6 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
7. A तथा B मित्र हैं, उनके जन्म दिवस की प्रायिकता ज्ञात करो।

- (i) जब जन्म दिवस समान हो
 - (ii) जब जन्म दिवस भिन्न हो।
8. एक पिग्गी बैंक में 50 पैसे के सौ सिक्के हैं, 1 रू. के 50 सिक्के हैं, 2 रू. के बीस सिक्के और 5 रू. के दस सिक्के हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाला गया सिक्का -
 - (i) 50 पैसे का होगा।
 - (ii) 5 रू. का नहीं होगा?
 9. एक बक्से में 3 नीले, 2 सफेद और 4 लाल कंचे हैं। यदि इस बक्से में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है तो इसकी प्रायिकता है कि यह कंचा -
 - (i) सफेद है
 - (ii) नीला है
 - (iii) लाल नहीं है
 - (iv) लाल है





@SHEKHAWAT
MISSION100

शेखावाटी मिशन 100 की कक्षा 10 एवं 12 के विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें।

प्रथम मॉडल पेपर - 2024

समय : 03 घण्टे 15 मिनट

कक्षा - 10 वीं

विषय - गणित

पूर्णांक : 80

परिक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश:-

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।

खण्ड - A

बहुविकल्पी प्रश्न

1. निम्न वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चयन कर उत्तर पुस्तिका में लिखिए - [1×15=15]

(i) $2\sqrt{3}$ एक -

- (1) पूर्णांक है (2) परिमेय संख्या है
(3) अपरिमेय संख्या है। (4) एक पूर्ण संख्या है (3)

(ii) बहुपद $f(x)=x^2-15$ शून्यांको का गुणनफल होगा -

- (1) 3 (2) -15
(3) + 15 (4) 1 (2)

(iii) बिन्दु $Q(-4,-5)$ की x - अक्ष से दूरी है-

- (1) 16 (2) + 7
(3) 25 (4) 5 (4)

(iv) आंकड़ो 5,7,0,3,4,8,2 का माध्यक है-

- (1) 4 (2) 3
(3) 7 (4) 0 (1)

(v) 5 मीटर ऊँचे एक वृक्ष की छाया $5\sqrt{3}$ मीटर पर बने तो सूर्य का अन्नतांश कोण है-

- (1) 90° (2) 60°
(3) 45° (4) 30° (4)

(vi) युग्म (a, b) व $(-a, -b)$ की मध्य दूरी होगी -

- (1) $2(a+b)$ (2) 0
(3) a^2-b^2 (4) $2\sqrt{a^2+b^2}$ (4)

(vii) समांतर श्रेणी $-5,-1,3,7$ का सार्व अंतर है-

- (1) 4 (2) -4

- (3) 2 (4) -3 (1)

(vii) सभी त्रिभुज समरूप होते हैं-

- (1) समद्विबाहु (2) समबाहु
(3) समकोण (4) विषमबाहु (2)

(viii) समकोण $\triangle ABC$ में $15 \cot A=8$ हो तो $\sin A$ का मान होगा-

- (1) $\frac{8}{15}$ (2) $\frac{15}{17}$

- (3) $\frac{8}{17}$ (4) 1 (2)

(x) समान्तर श्रेणी 3,8,13,18..... का कौनसा पद 78 है-

- (1) 15 (2) 16
(3) 17 (4) 12 (2)

(xi) वृत्त की वह जीवा जिसकी लम्बाई त्रिज्या से दो गुनी होती है कहलाती है-

- (1) परिधि (2) क्षेत्रफल
(3) व्यास (4) त्रिज्या खण्ड (3)

(xii) एक वृत्त पर कुल स्पर्श रेखाएं खींची जा सकती है-

- (1) चार (2) पाँच
(3) एक (4) अनंत (4)

(xiii) प्रथम चार विषम संख्याओं का माध्य है-

- (1) 4 (2) 5
(3) 7 (4) 6 (1)

(xiv) एक ठोस अर्द्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल है-

- (1) $2\pi r^2$ (2) $4\pi r^2$

- (3) $3\pi r^2$ (4) $\frac{2}{3}\pi r^2$ (3) उत्तर
- (xv) निश्चित घटना की प्रायिकता होती है-
 (1) 1 (2) 0
- (3) ∞ (4) $\frac{1}{2}$ (1)

2. निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उत्तर पुस्तिका में लिखिये- [1×7=7]

- (i) एक पासे को उछाले जाने पर सम संख्या आने की प्रायिकता होती है। $\left(\frac{1}{2}\right)$
- (ii) वर्ग अन्तराल 20-35 का वर्ग चिह्न होता है। (27.5)
- (iii) एक शंकु का आयतन बेलन के आयतन का होता है। $\left(\frac{1}{3}\right)$
- (iv) समान्तर श्रेणी 5,2,-1,-4,..... का 10 वा पद है। (-22)
- (v) वृत्त की स्पर्श रेखा व त्रिज्या के मध्य का कोण होता है। (90°)
- (vi) यदि 9,4,7, x का समान्तर माध्य 8 हो तो x का मान होगा। (12)
- (vii) $1+\tan^2 45$ का हल..... होता है। (2)

3. अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न -

(i) यदि $\sin 3x = 1$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर $\sin 3x = 1 = \sin 90^\circ$
 $3x = 90^\circ$
 अतः $x = \frac{90}{3} = 30^\circ$

(ii) यदि किसी खम्भे की परछाई उसकी लम्बाई के तुल्य हो तो सूर्य का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर $\tan \theta = \frac{h}{h} = 1$
 अतः $\theta = 45^\circ$

(iii) एक घड़ी की मिनट की सूई द्वारा 10 मिनट में केन्द्र पर

अन्तरित कोण का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर मिनट की सूई द्वारा 10 मिनट में केन्द्र पर अन्तरित कोण = $\frac{360}{60} \times 10 = 60^\circ$

(iv) किसी घन का आयतन 64 सेमी³ है इसके एक फलक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर भुजा = $(\text{आयतन})^{\frac{1}{3}} = (64)^{\frac{1}{3}}$
 = 4
 फलक का क्षेत्रफल = भुजा² = (4)²
 = 16 वर्ग सेमी.

(v) किसी शंकु की तिर्यक लम्बाई 5 सेमी तथा ऊँचाई 4 सेमी हो तो उसका व्यास ज्ञात कीजिए।

उत्तर त्रिज्या $r = \sqrt{(5)^2 - (4)^2}$
 = $\sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$
 = 3 cm
 अतः व्यास = 6cm

(vi) बिन्दु A(3,5) व बिन्दु B(7,9) के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए-

उत्तर मध्य बिन्दु
 $x = \frac{3+7}{2} = 5$
 $y = \frac{5+9}{2} = 7$
 अतः (5, 7)

(vii) sss नियम लिखिए।

उत्तर दो त्रिभुजों की भुजाएं समान लम्बाइयों की हो तो वे समरूप होते हैं।

(viii) समीकरण $2x-5y-13=0$ हो तो x को y के रूप में व्यक्त कीजिए।

उत्तर $2x-5y-13 = 0$
 $2x = 5y + 13$
 अतः $x = \frac{5y+13}{2}$

(ix) बहुपद $P(x) = x^2-2x-8$ के शून्यांक ज्ञात कीजिए।
 $x^2-2x-8 = 0$

$$x^2 - 4x + 2x - 8 = 0$$

$$x(x - 4) + 2(x - 4) = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

अर्थात् $x = 4$ या -2

अतः शून्यांक = 4 या -2

(x) $\sqrt{2}$ व $\sqrt{3}$ के मध्य एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर $\sqrt{2} = 1.414$ अतः इनके मध्य 1.5 होगा।

$$\sqrt{3} = 1.732 \text{ अर्थात् } \sqrt{2} < 1.5 < \sqrt{3}$$

लघुत्तरात्मक प्रश्न-

4. दर्शाइए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर माना $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है अतः $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ अर्थात्

$$\sqrt{2} = \frac{a}{3b} \text{ चूँकि यहाँ } 3, a \text{ व } b \text{ पूर्णांक है अतः } \frac{a}{3b} \text{ एक}$$

परिमेय संख्या होगी तथा $\sqrt{2}$ भी परिमेय संख्या होगी परन्तु यथार्थ में $\sqrt{2}$ अपरिमेय है अतः $3\sqrt{2}$ भी अपरिमेय संख्या है।

5. यदि बहुपद $f(x) = x^2 - 8x + K$ के शून्यांको के वर्गों का योग 40 है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर $f(x) = x^2 - 8x + K$ यदि शून्यांक α व β हो तो

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 8 \text{ तथा } \alpha\beta = \frac{c}{a} = K$$

$$\text{प्रश्नानुसार } \alpha^2 + \beta^2 = 40$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 40$$

$$2K = 64 - 40 = 24$$

$$K = \frac{24}{2} = 12$$

6. सिद्ध कीजिए की रेखिक समीकरण युग्म $\frac{4}{3}x + 2y = 8$

व $2x + 3y = 12$ द्वारा निरूपित रेखाएँ सम्पाती होंगी।

उत्तर $\frac{4}{3}x + 2y - 8$ व $2x + 3y - 12 = 0$

$$\text{यहाँ } \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{3} \text{ व } \frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$$

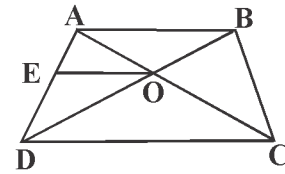
$$\text{अर्थात् } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{3}$$

अतः रेखाएँ परस्पर संपाती होगी।

7. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस

प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है दर्शाइए कि ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

उत्तर



दिया है - विकर्ण

AC व BD परस्पर

बिन्दु O पर प्रतिच्छेद

करते हैं जहाँ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ (1)

सिद्ध करना है - ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

रचना EO \parallel AB खींची जो AD को E पर मिलती है।

उपपत्ति - $\triangle DAB$ में EO \parallel AB

$$\text{अतः } \frac{DE}{EA} = \frac{DO}{OB} \text{ परंतु } \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

$$\text{या } \frac{DO}{OB} = \frac{CO}{AO}$$

$$\text{अतः } \frac{DE}{EA} = \frac{CO}{AO}$$

अर्थात् EO \parallel DC \parallel AB

अतः AB \parallel DC

स्पष्ट है कि ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

8. y का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु $P(2,-3)$ और $Q(10, y)$ के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

उत्तर $P(2,-3)$ व $(10,y)$ प्रश्नानुसार मध्य दूरी

$$PQ = \sqrt{(10-2)^2 + (y+3)^2} = 10$$

$$\Rightarrow 64 + y^2 + 6y + 9 = 100$$

$$\Rightarrow y^2 + 6y - 27 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 9y - 3y - 27 = 0$$

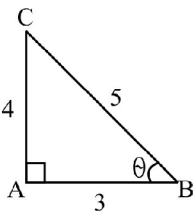
$$\Rightarrow y(y+9) - 3(y+9) = 0$$

$$\Rightarrow (y+9)(y-3) = 0$$

अतः $y = -9$ या 3

9. यदि $\sin \theta = \frac{4}{5}$ हो तो $(\tan \theta + \sec \theta)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर



$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$AB = \sqrt{(5)^2 - (4)^2}$$

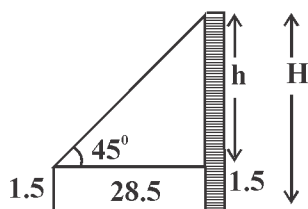
$$= 3$$

$$\text{अतः } (\tan \theta + \sec \theta)^2$$

$$= \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{3} \right)^2 = \left(\frac{9}{3} \right)^2 = 9$$

10. 1.5 मी. लम्बा एक प्रेक्षक एक चिमनी से 28.5 मी. की दूरी पर है। उसकी आँखों से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। चिमनी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर माना चिमनी की ऊँचाई H है।



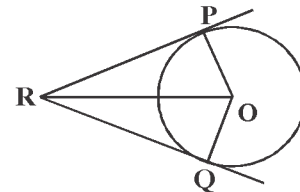
$$\tan 45^\circ = \frac{h}{28.5} = 1$$

$$h = 28.5 \text{ m}$$

$$\text{अतः } H = h + 1.5 = 1.5 + 28.5 = 30 \text{ अ}$$

11. सिद्ध कीजिए कि एक बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।

उत्तर



दिया है- केन्द्र O वाले

वृत्त के बाह्य बिन्दु R से

स्पर्श रेखाएँ PR व QR खींची गई हैं।

रचना OP, OQ, OR को मिलाया।

सिद्ध करना है- $RP = RQ$

उपपत्ति - OPR व $\triangle OQR$ से -

$$\angle OPR = \angle OQR = 90^\circ - (1)$$

$$OR = OR - (2) \text{ उभयनिष्ठ}$$

$$OP = OQ - (3) \text{ त्रिज्याएं}$$

$$\text{अतः } \triangle OPR \cong \triangle OQR$$

इसलिए $RP = RQ$ इति सिद्धम्

12. एक वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है तथा एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण 60° है। इस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर त्रिज्या $r = 7$ सेमी

$$\theta = 60^\circ$$

$$\text{त्रिज्या खण्ड क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{(7)^2 \times 60}{360}$$

$$= \frac{11 \times 7}{3} = \frac{77}{3} = 25.67 \text{ वर्ग सेमी}$$

13. दो गोलों के आयतनों का अनुपात $64 : 27$ है तो उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात है।

हल - माना दोनों गोलों की त्रिज्याएं r_1 व r_2 है अतः इन आयतनों

का अनुपात 64 : 27 है।

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \frac{64}{27} \Rightarrow \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{64}{27} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}$$

अतः पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात

$$\frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

अतः अभिष्ट अनुपात = 16 : 9

14. निम्न बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए -

प्रासांक	25	35	45	55	65
छात्रों की संख्या	4	28	42	20	6

उत्तर माना a = 45

प्रासांक	छात्र संख्या	d=x-a	fd
x	f		
25	4	-20	-80
35	28	-10	-280
45	42	0	0
55	20	10	200
65	6	20	120
	$\sum f = 100$		$\sum fd = -40$

$$\text{स.मा. } \bar{x} = a + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

$$= 45 + \left(\frac{-40}{100} \right)$$

$$= 45 - 0.4$$

$$= 44.6$$

15. एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदे हैं। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी प्रायिकता क्या है कि गेंद

(i) लाल हो (ii) लाल नहीं हो

उत्तर लाल गेंदों की संख्या = 3

काली गेंदों की संख्या = 5

कुल गेंदे 3 + 5 = 8

(i) लाल गेंद आने की प्रायिकता P(E) =

$$\frac{\text{अनु. स्थितियाँ}}{\text{कुल स्थितियाँ}} = \frac{3}{8}$$

(ii) लाल गेंद नहीं आने की प्रायिकता $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$$P(\bar{E}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

दीर्घउत्तरीय प्रश्न-

16. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इन आंकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या
65-85	4
85-105	5
105-125	13
125-145	20
145-165	14
165-185	8
185-205	4

अथवा

दैनिक मजदूरी (रुपये में)	500-520	520-540	540-560	560-580	580-600
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

कल्पित माध्य विधि से श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिए।

मासिक खपत	उपभोक्ताओं की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (cf)
65-85	4	4
85-105	5	9
105-125	13	22
125-145	20	42
145-165	14	56
165-185	8	64
185-205	4	68
योग	N = 68	

यहाँ N = 68 तो $\frac{N}{2} = \frac{68}{2} = 34$ से ठी बड़ी cf = 42

अतः माध्यक वर्ग 125-145 यहाँ l = 125, f = 20, c = 22, h = 20

$$\text{माध्यक } M = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - c}{f} \right) \times h$$

$$= 125 + \left(\frac{34 - 22}{20} \right) \times 20 = 125 + \frac{12}{20} \times 20$$

$$= 137$$

अथवा

दैनिक मजदूरी (रुपयों में)	श्रमिकों की संख्या (f)	वर्ग चिह्न x	माना a= 550 a=x-a	fd
500-520	12	510	-40	-480
520-540	14	530	-20	-280
540-560	8	550	0	0
560-580	6	570	20	120
580-600	10	590	40	400
योग	$\sum f = 50$			$\sum fd = -240$

स. माध्य $\bar{x} = a + \frac{\sum fd}{\sum f}$

$$= 550 + \left(\frac{-240}{50} \right)$$

$$550 - 4.8$$

$$= 545.2$$

17. n के किस मान के लिए, दोनों समान्तर श्रेणियों 63, 65, 67..... और 3, 10, 17, के n वें पद एक समान होंगे?

अथवा

2 और 101 के मध्य 5 से विभाजित होने वाली सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर 63, 65, 61 n वां पद

$$a_n = a + (n-1)d = 63 + (n-1) \times 2 \dots\dots\dots (1)$$

3, 10, 17, n वां पद

$$a_n^1 = 3 + (n-1) \times (7) \dots\dots\dots (2)$$

प्रश्नानुसार

$$a_n = a_n^1$$

$$63 + (n-1) \times 2 = 3 + (n-1) \times (7)$$

$$63 + 2n - 2 = 3 + n - 7$$

$$2n - 7n = -61 - 4$$

$$-5n = -65$$

$$n = \frac{-65}{-5} = 13 \text{ वां पद}$$

अथवा

2 व 105 के मध्य 5 से विभाजित प्राकृत संख्याएँ-

5, 10, 15, 20, 100

यदि 100, n वां पद होतो - $a_n = a + (n-1)d$

$$100 = 5 + (n - 1) \times 5$$

$$100 = 5 + 5n - 5$$

$$5n = 100 \text{ या } n = \frac{100}{5} = 20 \text{ वां पद}$$

अतः 20 पदों का योग $S_n = \frac{N}{2} [a + a_n]$

$$= \frac{20}{2} [5 + 100] = 10 \times 105$$

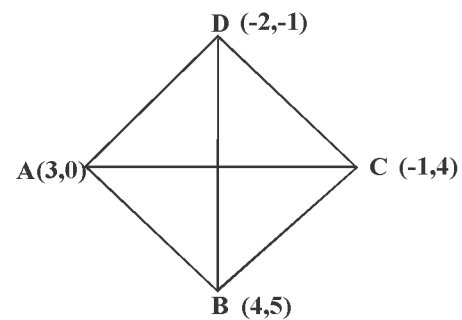
$$= 1050$$

18. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष इस क्रम में (3,0), (4,5), (-1,4) और (-2,-1) है।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (2,-2), (-2,1) तथा (5,2) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष है।

उत्तर



माना ABCD एक समचतुर्भुज है।

$$\text{विकर्ण AC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+16}$$

$$= 4\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

$$\text{विकर्ण BD} = \sqrt{(-2,-4)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{36+36}$$

$$= 6\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} (\text{विकर्णों का गुणफलन})$$

$$= \frac{1}{2} \times (4\sqrt{2}) \times (6\sqrt{2})$$

$$= 24 \text{ वर्ग मात्रक}$$

अथवा

$$\text{यहाँ दूरी } d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 + y_1)^2}$$

अतः ΔABC के लिए यदि $A(2,-2)$, $B(-2,1)$ व $C(5,2)$ हो तो -

$$(AB)^2 = (-2-2)^2 + (1+2)^2 = (-4)^2 + (3)^2 = 16+9=25$$

$$(BC)^2 = (5+2)^2 + (2-1)^2 = (7)^2 + (1)^2 = 49+1=50$$

$$(CA)^2 = (2-5)^2 + (-2-2)^2 = (-3)^2 + (-4)^2 = 9+16=25$$

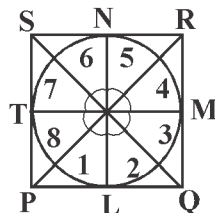
अर्थात् $(AB)^2 + (CA)^2 = (BC)^2$ अतः ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

19. सिद्ध कीजिए की वृत्त के परिगत बने चतुर्भुज के आमने-सामने की भुजाएँ केन्द्र पर सम्पूरक कोण अंतरित करती है।

अथवा

सिद्ध कीजिए की किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण का सम्पूरक होता है।

उत्तर



दिया है - O केन्द्र वाले वृत्त के PQRS एक परिगत चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है-

$$\angle POQ + \angle SOR = 180^\circ$$

$$\angle SOP + \angle ROQ = 180^\circ$$

रचना - केन्द्र O से विभिन्न बिन्दुओं का मिलाया।

उपपत्ति - यहाँ $\angle 2 = \angle 3$, $\angle 4 = \angle 5$, $\angle 6 = \angle 7$, $\angle 8 = \angle 1$

सभी का योग $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^\circ$

$$2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6) = 360^\circ$$

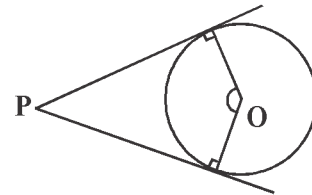
$$(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 5 + \angle 6) = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

अर्थात् $\angle POQ + \angle SOR = 180^\circ$

इसी प्रकार $\angle SOP + \angle ROQ = 180^\circ$ इति सिद्धम्

अथवा

हल.



दिया है:- एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा PQ तथा PR वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

सिद्ध करना है:- $\angle ROQ + \angle QPR = 188$

हल:- वृत्त में OQ त्रिज्या है तथा PQ स्पर्श रेखा है

$\therefore \angle OQP = 90^\circ$ (स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लम्बवत होती है।)

इसी प्रकार

$$\angle ORP = 90^\circ$$

चतुर्भुज PQOR में,

$$\angle RPQ + \angle QOR + \angle OQP + \angle ORP = 360^\circ$$

$$\angle RPQ + \angle QOR + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\angle RPQ + \angle QOR + 180^\circ = 360^\circ$$

$$\angle RPQ + \angle QOR = 360^\circ - 180^\circ$$

$$\angle RPQ + \angle QOR = 180^\circ$$

$$\angle ROQ + \angle QPR = 180^\circ$$

अतः $\angle ROQ + \angle QPR = 180^\circ$

खण्ड -द

20. निम्न आँकड़े किसी विद्यालय में कक्षा X के 100 छात्रों

की एक विशेष सत्र में दिये गये हैं। इस बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

अंक	छात्रों की संख्या
10 से कम	7
20 से कम	21
30 से कम	34
40 से कम	46
50 से कम	66
60 से कम	77
70 से कम	92
80 से कम	100

अथवा

निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका 526 है। यदि बारम्बारताओं का योग 100 है तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	बारम्बारता
0-100	2
100-200	5
200-300	x
300-400	12
400-500	17
500-600	20
600-700	y
700-800	9
800-900	7
900-1000	4

उत्तर सही वर्गीकृत सारणी

अंक	छात्रों की संख्या
0-10	7
10-20	21-7=14
20-30	34-21=13
30-40	46-34=12 f ₀
40-50	66-46=20 f ₁ बहुलक वर्ग
50-60	77-66=11 f ₂
60-70	92-77=15
70-80	100-92=08

यहाँ l = 40, f₀ = 12, f₁ = 20, f₂ = 11, h = 10

$$\text{बहुलक } Z = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{20 - 12}{2 \times 20 - 12 - 11} \right) \times 10$$

$$= 40 + \frac{8}{17} \times 10 = 40 + 4.7 = 44.7$$

अथवा

वर्ग	बारम्बारता (f)	(cf)
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	7+x
300-400	12	19+x
400-500	17	36+x
600-700	y	56+x+y
700-800	9	65+x+y
800-900	7	72+x+y
900-1000	4	76+x+y
	N=100	

प्रश्नानुसार माध्यक M = 525 तथा

$$N = 76 + x + y = 100$$

$$x + y = 100 - 76$$

$$x + y = 24 \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{माध्यक } M = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - c}{f} \right) \times h$$

$$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20} \right) \times 100$$

$$525 = 500 + \left(\frac{14 - x}{20} \right) \times 100$$

$$\frac{25}{5} = 14 - x \text{ या } x = 14 - 5 = 09$$

$$\text{समी. 1 से } Y = 24 - x = 24 - 9 = 15$$

21. $2x+3y=11$ और $2x-4y=-24$ को हल कीजिए और इसमें 'm' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y = mn + 3$ हो।

अथवा

पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की आयु से तीन गुनी थी, दस वर्ष पश्चात नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जाएगी। नूरी व सोनू की आयु कितनी है।

उत्तर $2x + 3y = 11$

अतः $x = \frac{11-3y}{2}$ (1)

तथा $2x - 4y = -24$

अतः $2\left(\frac{11-3y}{2}\right) - 4y = -24$

$-7y = -24-11 = -35$

$y = \frac{-35}{-7} = 5$

समी. 1 में मान रखने पर $x = \frac{11-3 \times 5}{2} = \frac{11-15}{2}$

$= \frac{-4}{2} = -2$

x व y का मान रखने पर $y = mn + 3$

$5 = m(-2) + 3$

$-2m = 5-3=2$

$m = \frac{2}{-2} = -1$

अथवा

माना नूरी की वर्तमान आयु = x वर्ष

सोनू की वर्तमान आयु = y वर्ष

5 वर्ष पूर्व की शर्त-

$(x-5) = 3(y-5)$

$x - 3y = -10$ (1)

10 वर्ष पश्चात - $x + 10 = 2(y + 10)$

$x - 2y = 10$ (2)

समी. 1 व 2 से-

$x - 3y = -10$

$-x + 2y = -10$

$\frac{-y = -20}{-y = -20}$ अर्थात $y = 20$ वर्ष

समी. 2 से

$x - 2 \times 20 = 10$

$x = 50$ वर्ष

अतः नूरी की आयु = 50 वर्ष

सोनू की आयु = 20 वर्ष

22. सिद्ध कीजिए कि - $\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

अथवा

सिद्ध कीजिए कि -

$\frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$

उत्तर $\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

L.H.S

$\frac{\cos^2 A + (1 + \sin A)^2}{(1 + \sin A) \cos A} = \frac{\cos^2 A + \sin^2 A + 2 \sin A + 1}{(1 + \sin A) \cos A}$

$= \frac{1 + 2 \sin A + 1}{(1 + \sin A) \cos A} = \frac{2 + 2 \sin A}{(1 + \sin A) \cos A}$

$= \frac{2(1 + \sin A)}{(1 + \sin A) \cos A} = 2 \sec A = \text{RHS}$

अथवा

$\frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$

L.H.S.

$\frac{\left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)}{\left(1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)} + \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}{\left(1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)}$

$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta (\cos \theta - \sin \theta)}$

$= \frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)}$

$= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)}$

$= \frac{1 + \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$

$= 1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$

$= \text{RHS इति सिद्धम्}$

द्वितीय मॉडल पेपर - 2024

समय : 03 घण्टे 15 मिनट

कक्षा - 10 वीं

विषय - गणित

पूर्णांक : 80

परिक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश:-

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।

खण्ड - A

बहुविकल्पी प्रश्न

1. निम्न वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चयन कर उत्तर पुस्तिका में लिखिए - [$1 \times 15 = 15$]
- (i) 144 व 198 का म.स.प. होगा- -
(1) 6 (2) 12
(3) 9 (4) 18 (4)
- (ii) बहुपद $P(x) = (x-5)(3+x)$ की घात है-
(1) 3 (2) 2
(3) 1 (4) 5 (2)
- (iii) बिन्दु $(-3,5)$ कौन से चतुर्थास में होगा -
(1) प्रथम (2) द्वितीय
(3) तृतीय (4) चतुर्थ (2)
- (iv) आंकड़ो 5,7,6,5,6,8,4,5 का बहुलक है-
(1) 4 (2) 6
(3) 5 (4) 7 (3)
- (v) एक खम्भे की परछाई की लम्बाई 2मीटर है जबकि सूर्य का उन्नयन कोण 60° है तो खम्भे की लम्बाई -
(1) 2 मीटर (2) $\sqrt{3}$ मीटर
(3) $2\sqrt{3}$ मीटर (4) 4 मीटर (3)
- (vi) बिन्दु $(-x,-y)$ की मूल बिन्दु से दूरी है -
(1) $-x$ (2) $-y$
(3) x^2+y^2 (4) $\sqrt{x^2+y^2}$ (4)
- (vii) समांतर श्रेणी $a, 3a, 5a, \dots$ का n वां पद है-
(1) na (2) $a(2n-1)$

- (3) $2na$ (4) $a(2n+1)$ (2)

(viii) सभी वृत होते है-

- (1) समरूप (2) सर्वांगसम
- (3) बराबर (4) इनमें से कोई नहीं (1)

(ix) $\sin A = \frac{4}{5}$ हो तो $\cos A$ का मान होगा-

- (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{5}{3}$
- (3) $\frac{4}{5}$ (4) 1 (1)

(x) 3 के प्रथम पाँच गुणजों का योगफल है-

- (1) 45 (2) 55
- (3) 65 (4) 75 (1)

(xi) एक वृत के बाह्य बिन्दु से खींची गई अधिकतम स्पर्श रेखाएँ है-

- (1) एक (2) दो
- (3) तीन (4) अनन्त (2)

(xii) वह रेखा जो वृत को दो बिन्दुओं पर काटती है, कहलाती है-

- (1) जीवा (2) छेदक रेखा
- (3) स्पर्श रेखा (4) इनमें कोई नहीं (2)

(xiii) आंकड़ो 15,12,10,8,13,4,9 में परिसर होगा-

- (1) 15 (2) 4
- (3) 11 (4) 7 (3)

(xiv) घन के एक पृष्ठ का परिमाप 28 सेमी है तो घन की भुजा है-

- (1) 21 सेमी (2) 14 सेमी
(3) 7 सेमी (4) 56 सेमी (3)
(xv) एक पासे को फेंकने पर 3 का गुणज आने की प्रायिकता है-

- (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{2}{3}$
(3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{3}$ (4)

2. निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए पुस्तिका में लिखिए-

(i) किसी असंभव घटना के होने की प्रायिकता होती है। (0)

(ii) संचयी बारम्बारता सारणी का उपयोग ज्ञात करने में किया जाता है। (माध्यक)

(iii) घन ऐसा घनाभ है जिसके 6 पृष्ठों का क्षेत्रफल होते हैं। (समान)

(iv) यदि a, b, c समान्तर श्रेणी में हो तो $b = \dots\dots\dots$ होता है। $\left(b = \frac{a+c}{2} \right)$

(v) वृत्त पर स्थित एक बिन्दु से स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। (1)

(vi) $\tan 30^\circ \tan 60^\circ$ का मान होता है। (1)

(vii) प्रथम दस सम प्राकृत संख्याओं का माध्य होगा। (11)

3. अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न -

- (i) संख्या 72 और 120 का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) ज्ञात कीजिए।

उत्तर $72 = 2^3 \times 3^2$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$\text{अतः LCM} = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$= 360$$

- (ii) बहुपद $x^2 + 4x + K$ का एक शून्यक 2 है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर $x = 2$ पर

$$f(x) = x^2 + 4x + K$$

$$f(2) = (2)^2 + 4 \times 2 = K$$

$$= 4 + 8 + K = 0$$

$$\text{अतः } K = -12$$

- (iii) 7 पेंसिल तथा 5 पेन का तुल्य मूल्य 29 रुपये है इसे बिजगणितीय रूप में लिखिए।

उत्तर मान 1 पेंसिल = x रु.

$$1 \text{ पेन} = y \text{ रु.}$$

$$\text{अतः } 7x + 5y = 29$$

- (iv) दो समरूप त्रिभुज ABC व PQR के परिमाण क्रमशः 36 सेमी व 24 सेमी है यदि $PQ = 10$ सेमी हो तो AB ज्ञात कीजिए।

उत्तर $\frac{AB}{PQ} = \frac{36}{24}$

$$AB = \frac{36}{24} \times PQ$$

$$= \frac{36}{24} \times 10 = 15 \text{ cm}$$

- (v) एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 100π वर्ग मीटर है। उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर गोले का क्षेत्रफल = $4\pi r^2$

$$\text{त्रिज्या } r = \sqrt{\frac{\text{क्ष.}}{4\pi}} = \sqrt{\frac{100\pi}{4\pi}}$$

$$= 5 \text{ सेमी}$$

- (vi) एक अर्द्ध गोले की त्रिज्या 3.5 सेमी है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

उत्तर अर्द्ध गोले का आयतन

$$= \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^3$$

$$= 89.83 \text{ घन सेमी.}$$

- (vii) निर्देशांक (4, 3) में भुज और कोटि ज्ञात कीजिए।

उत्तर भुज- 4

कोट - 3

- (viii) r त्रिज्या वाले वृत्त के एक त्रिज्याखण्ड, जिसका कोण अंशों में θ है का क्षेत्रफल लिखिए।

उत्तर त्रिज्याखण्ड क्षे. = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

- (ix) सूर्य के उन्नयन कोण में वृद्धि (0 से 90°) होने से किसी मीनार की परछाई की लम्बाई में क्या परिवर्तन

होगा? लिखिए।

उत्तर कमी होगी।

(x) $\frac{\sqrt{1-\sin^2 40^\circ}}{\cos 40^\circ}$ का सरलतम मान लिखिए।

उत्तर $\frac{\sqrt{1-\sin^2 40^\circ}}{\cos 40^\circ}$
 $= \frac{\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = 1$

खण्ड - ब

लघुत्तरात्मक प्रश्न -

4. दो संख्याओं 616 और 32 का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर $616 = 2^3 \times 7 \times 11$
 $32 = 2^5$
 अतः HCF $2^3 = 8$

5. द्विघात बहुपद $2x^2 - 6x + 4$ के शून्यांको का योग व गुणनफल ज्ञात कीजिए। [2]

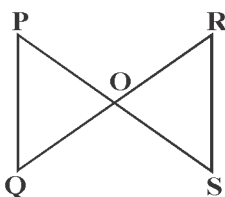
उत्तर $2x^2 - 6x + 4$
 में $a = 2$, $b = -6$ व $c = 4$
 योग $\alpha + \beta = \frac{b}{a} = \frac{-6}{2} = -3$

गुणनफल $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$

6. दो संख्याओं का अंतर 26 तथा बड़ी संख्या छोटी संख्या के 3 गुने से 4 अधिक है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर माना बड़ी संख्या = x
 व छोटी संख्या = y
 प्रश्नानुसार $x - y = 26$
 तथा $x - 3y = 4$

7. दी गयी आकृति में यदि $PQ \parallel RS$ तो सिद्ध कीजिए की $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ है।



उत्तर $PQ \parallel RS$

अतः $\angle P = \angle S$ एकांतर

$\angle Q = \angle R$ एकांतर

$\angle POQ = \angle SOR$ शीर्षाभिमुख

इसलिए $\Delta POQ \sim \Delta SOR$

इति सिद्धम्

8. बिन्दुओं (-3,10) और (6,-8) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु (-1,6) किस अनुपात में विभाजित करता है?

[2]

उत्तर

चूंकि $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

$-1 = \frac{6K - 3}{K + 1}$

$6K - 3 = -K - 1$

$6K + K = -1 + 3$

$7K = 2$

$K = \frac{2}{7}$

अर्थात् $K : 1 = \frac{2}{7} : 1$

अतः 2 : 7

9. यदि $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ और $\cos \beta = \frac{1}{2}$ हो तो $(\alpha + \beta)$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर $\sin \alpha = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

अर्थात् $\alpha = 30^\circ$

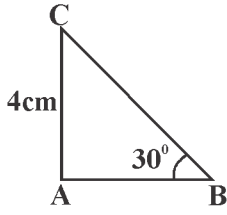
तथा $\cos \beta = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$

अर्थात् $\beta = 60^\circ$

अतः $\alpha + \beta = 30 + 60 = 90^\circ$

10. एक वृक्ष से 4 मीटर की ऊँचाई से टूटकर इस प्रकार गिरता है कि इसका ऊपरी सिरा पृथ्वी से 30° को कोण बनाता है। वृक्ष की कुल ऊँचाई ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर



यदि एक BC पेड़ का टूटा हुआ भाग हो तो

$$\sin 30 = \frac{4}{BC}$$

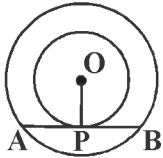
$$\text{अर्थात् } BC = \frac{4}{\sin 30} = \frac{4}{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

अतः $BC = 4 \times 2 = 8$ मी.

$$\begin{aligned} \text{इसलिए पेड़ की लम्बाई} &= AC + BC \\ &= 4\text{m} + 8\text{m} \\ &= 12\text{m अ} \end{aligned}$$

11. सिद्ध कीजिए कि दो संकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है। [2]

हल.



दिया है:- O केन्द्र वाले दो संकेन्द्रीय वृत्त हैं

बड़े वृत्त की जीवा AB जो छोटे वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है

सिद्ध करना है:- $AP = BP$

रचना :- OP को मिलाया।

उपपत्ति :- AB छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है तथा OP त्रिज्या है।

$\therefore OP \perp AB$

अतः OP जीवा AB को समद्विभाजित करेगी क्योंकि केन्द्र से जीवा पर खींचा गया लंब उसे समद्विभाजित करता है।

अर्थात् $AP = BP$

12. एक घड़ी के घण्टे की सुई 6 सेमी लम्बी है। 90 मिनट में इस सुई द्वारा बनाये गये त्रिज्या खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर घंटे की सुई की लम्बाई = 6 सेमी. (त्रिज्या)

$$\text{घंटे की सुई द्वारा 1 मिनट में बनाया गया कोण} = \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$\text{अतः 90 मिनट में } \theta = \frac{1}{2} \times 90 = 45^0$$

$$\text{घंटे की सुई द्वारा निर्मित त्रिज्या खण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2}{360^0} \times \theta$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 6 \times 45^0}{360^0}$$

$$= \frac{792}{56} = 14.14 \text{ सेमी.}^2$$

13. त्रिज्या 4.2 सेमी वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 सेमी. वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है। तो बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर

माना बेलन की ऊँचाई = H

यहाँ गोले की त्रिज्या $r = 4.2$ cm

बेलन की त्रिज्या $R = 6$ cm

प्रश्नानुसार

बेलन का आयतन = गोले का आयतन

$$\pi R^2 H = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$H = \frac{4r^3}{3R^2} = \frac{4 \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 6 \times 6}$$

$$= \frac{42 \times 42 \times 42}{27 \times 1000}$$

$$= 2.74 \text{ सेमी.}$$

14. बंटन 1,6,3,5,7,9,11,4,9 का माध्यक तथा बहुलक ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर

आरोही क्रम में लिखने पर -

1,3,4,5,6,7,9,9,11 कुल 9 पद अतः

$$\text{माध्यक} = \left(\frac{9+1}{2}\right) = 5\text{वां पद}$$

$$= 6$$

यहाँ सर्वाधिक बारम्बारता 9 की है।

अतः बहुलक = 9

15. किसी अलीप वर्ष में 53 रविवार आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। [2]

उत्तर अलीप वर्ष में दिन = 365

$$\text{अर्थात् } \frac{365}{7} = 52 \text{ सप्ताह व 1 दिन}$$

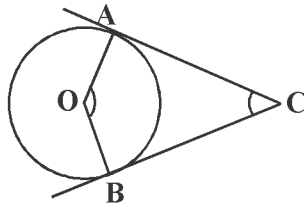
कुल 7 दिवस (सोम, मंगल, बुध, गुरु, शुक्र, शनि, रवि)

में से 1 दिन रविवार आने की प्रायिकता $P = \frac{1}{7}$ होगी

खण्ड-स

दीर्घउत्तरीय प्रश्न

16. दी गई आकृति में O एक वृत्त का केन्द्र है जिसके बाह्य बिन्दु C से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ CA व CB खींची गई है, तो सिद्ध कीजिए AOB व ACB सम्पूरक है।



उत्तर दिया है - वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु C से स्पर्श रेखाएँ CA व CB हैं।

$$\text{अतः } \angle AOB + \angle ACB = 180^\circ$$

उपपत्ति - OA त्रिज्या है और CA बिन्दु C से स्पर्श रेखाएँ हैं अतः

$$\angle OAC = 90^\circ$$

इसी प्रकार $\angle OBC = 90^\circ$

चतुर्भुज BOAC में -

$$\angle BOA + \angle CBO + \angle OAC + \angle ACB = 360^\circ$$

$$\angle BOA + 90^\circ + 90^\circ + \angle ACB = 360^\circ$$

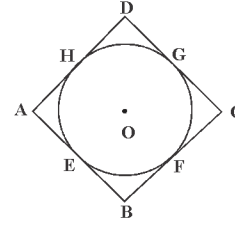
$$\angle BOA + \angle ACB = 180^\circ$$

इति सिद्धम्

अथवा

सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समान्तर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

उत्तर



दिया है - एक समान्तर चतुर्भुज ABCD केन्द्र O वाले वृत्त के परिगत है।

सिद्ध करना है ABCD एक सम चतुर्भुज है।

उपपत्ति -

स्पर्श रेखा प्रमेय से $BE = BF$ (1)

इसी प्रकार $AE = AH$ (2)

$CG = CF$ (3)

$DG = DH$ (4)

समी. 1,2,3 व 4 को जोड़ने पर -

$$(BE + AE) + (CG + DG) = (BE + CF) + (AH + DH)$$

$$AB + CA = BC + AD$$

चूँकि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

अतः $AB = CD$ व $AD = BC$

अतः $2AB = 2BC$ अर्थात् $AB = BC$

स्पष्ट है $AB = BC = CD = AD$

अतः ABCD एक समचतुर्भुज है।

इति सिद्धम्

17. दर्शाइये कि बिन्दु (1,7), (4,2), (-1,-4) और (-4,4) एक वर्ग के शीर्ष हैं।

उत्तर A(1,7), B(4,2), C(-1,-1) तथा D(-4,-4)

वर्ग की भुजाएँ बराबर होती हैं तथा विकर्ण भी बराबर होते हैं।

$$\text{भुजा } AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{34}$$

$$\text{भुजा } BC = \sqrt{(-1-4)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{34}$$

$$\text{भुजा } CD = \sqrt{(-4+1)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{34}$$

$$\text{भुजा } DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{34}$$

$$\text{विकर्ण } AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-7)^2}$$

$$= \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$\text{विकर्ण } BD = \sqrt{(-4-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{68}$$

स्पष्ट है कि ABCD एक वर्ग है।

अथवा

ज्ञात कीजिए कि रेखा $3x + y = 9$ बिन्दुओं (1,3) तथा (2,7) को मिलाने वाली रेखा रेखाखण्ड को किस अनुपात में विभाजित किया जाता है।

उत्तर माना बिन्दु (1,3) तथा (2,7) को मिलाने वाली रेखा रेखाखण्ड $3x+y=9$ को $\lambda : 1$ में विभाजित करता है अतः विभाजक बिन्दु के लिए

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1}$$

$$y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} = \frac{7\lambda + 3}{\lambda + 1}$$

समी. में मान रखने पर -

$$3\left(\frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1}\right) + \frac{7\lambda + 3}{\lambda + 1} = 9$$

$$(6\lambda + 3) + (7\lambda + 3) = 9\lambda + 9$$

$$4\lambda = 3$$

$$\lambda = \frac{3}{4} \text{ अर्थात् } \lambda : 1 = \frac{3}{4} : 1$$

अतः 3 : 4

18. किसी AP के चौथे और 8 वें पदों का योग 24 है तथा छठे और 10 वें पदों का योग 44 है। इस AP के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर प्रश्नानुसार

$$A_4 + A_8 = 24$$

$$a + 3d + a + 7d = 24$$

$$2a + 10d = 24$$

$$a + 5d = 12 \dots\dots\dots(1)$$

$$a_6 + a_{10} = 44$$

$$a + 5d + a + 9d = 44$$

$$2a + 14d = 44$$

$$a + 7d = 22 \dots\dots\dots(2)$$

समी. (1)-(2)

$$a + 5d = 1$$

$$-a \pm 7d = -22$$

$$-2d = -10$$

$$d = 5$$

$$\text{समी. 1 से } a + 5 \times 5 = 12$$

$$a = -13$$

अतः तीन पद -13, -8, -3

अथवा

किसी AP के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर प्रश्नानुसार -

$$S_7 = 49$$

$$\frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = S_n$$

$$\frac{7}{2} (2a + 6d) = 49$$

$$2a + 6d = \frac{49 \times 2}{7} = 14$$

$$a + 3d = 7 \dots\dots\dots(1)$$

इसी तरह से -

$$\frac{7}{2} (2a + 16d) = 289$$

$$a + 8d = 17 \dots\dots\dots(2)$$

समी. (1) व (2) से

$$a + 3d = 7$$

$$-a \pm 8d = -17$$

$$-5d = -10$$

$$d = 2$$

$$a = 1$$

n पदों का योग

$$\frac{n}{2} [2 + (n-1)2]$$

$$= n^2$$

19. कल्पित माध्य मानकर निम्न बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए-

वर्गअन्तराल	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
बारम्बारता	2	3	7	5	6	7

उत्तर माना कल्पित माध्य $a = 47.5$

वर्ग अन्तराल	विद्यार्थियों की संख्या (f)	वर्ग चिह्न (x)	d=x-a	fd
10-25	2	17.5	-30	-60
25-40	3	32.5	-15	-45
40-55	7	47.5	0	0
55-70	5	62.5	15	75
70-85	6	77.5	30	180
85-100	7	92.5	45	315
योग	$\Sigma f = 30$			$\Sigma fd = 465$

$$\text{स. माध्य } \bar{x} = a + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$$

$$= 47.5 + \frac{465}{30}$$

$$= 47.5 + 15.5$$

$$= 63$$

अथवा

निम्न बारम्बारता बटन का माध्य 50 हो तो x व y के मान ज्ञात कीजिए-

वर्ग अन्तराल	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	योग
बारम्बारता	17	x	32	y	19	120

उत्तर $\bar{x} = 50$

वर्ग अंतराल	बारम्बारता (f)	माध्य बिन्दु (x)	fx
0-20	17	10	170
20-40	x	30	30x
40-60	32	50	1600
60-80	y	70	70y
80-100	19	90	1710
योग	$\Sigma f = 120$		$\Sigma fx = 30x + 70y + 3480$

बारम्बारताओं का योग -

$$17+x+32+y+19=120$$

$$x+y+68 = 120$$

$$x+y = 120-68$$

$$x+y = 52 \dots\dots\dots(1)$$

स. माध्य

$$50 = \frac{30x + 70y + 3480}{120}$$

$$30x + 70y = 6000 - 3480 = 2520$$

$$3x + 7y = 252 \dots\dots\dots(2)$$

समी. (1) को 7 से गुणा कर समी. (2) घटाने पर-

$$7x + 7y = 364$$

$$-3x + 7y = -252$$

$$\hline 4x = 112$$

$$x = \frac{112}{4} = 28$$

समी. (1) से $28 + y = 52$

$$y = 52 - 28 = 24$$

अतः $x = 28$ व $y = 24$

खण्ड -द

20. सिद्ध कीजिए कि -

$$\frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$$

उत्तर

$$\text{LHS } \frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{1 + \frac{1}{\cos A}}{\left(\frac{1}{\cos A}\right)}$$

$$= \frac{1 + \cos A}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1} = 1 + \cos A$$

$$= (1 + \cos A) \left(\frac{1 - \cos A}{1 - \cos A}\right)$$

$$= \frac{1 - \cos^2 A}{1 - \cos A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A} = \text{RHS}$$

इति सिद्धम्

अथवा

सिद्ध कीजिए कि -

$$\sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}} = \text{cosec } A + \cot A$$

LHS

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} \times \sqrt{\frac{1+\cos A}{1+\cos A}} \\ &= \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{1-\cos^2 A}} = \sqrt{\frac{(1+\cos A)^2}{\sin^2 A}} \\ &= \frac{1+\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} + \frac{\cos A}{\sin A} \end{aligned}$$

= cosecA + cotA

= RHS इति सिद्धम्

21. क्या परिमाण 80 मी. क्षेत्रफल 400 मी² के एक पार्क को बनाना सम्भव है? यदि है तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर पार्क की ल. = x मी.

पार्क की चौ. = y मी.

प्रश्नानुसार परिमाण 2(x+y) = 80

$$x+y = 40 \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{क्षे. } xy = 400 \text{ मी}^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{अतः } x(40-x) = 400$$

$$40x - x^2 - 400 = 0$$

$$x^2 - 40x + 400 = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{यहाँ } b^2 - 4ac = (-40)^2 - 4(1)(400)$$

$$= 1600 - 1600 = 0$$

अतः मूल वास्तविक व बराबर होंगे।

$$\text{यहाँ } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{40 \pm 0}{2}$$

$$= 20 \text{ मी.}$$

$$\text{समी. 1 से } 20 + y = 40$$

$$y = 40 - 20 = 20 \text{ मी.}$$

अर्थात् x = y

अतः आयताकार पार्क का अस्तित्व सम्भव है और यह एक वर्ग है।

अथवा

एक त्रिभुज की दो भुजाएं x सेमी तथा 3(x+1) सेमी समकोण बनाती है यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 84 वर्ग सेमी हो तो त्रिभुज की सभी भुजाएं ज्ञात कीजिए।

उत्तर यहाँ भुजाएँ x सेमी व 3(x + 1) सेमी.

प्रश्नानुसार, क्षे. = $\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} = 84 \text{ वर्ग सेमी}$

$$= \frac{1}{2} \times x \times 3(x+1) = 84$$

$$3x^2 + 3x = 168$$

$$x^2 + x = 56$$

$$x^2 + x - 56 = 0$$

$$x^2 + 8x - 7x - 56 = 0$$

$$(x+8)(x-7) = 0$$

या तो x + 8 = 0

$$x = -8$$

$$\text{या } x - 7 = 0$$

$$x = 7$$

अतः एक भुजा x = 7 सेमी

$$\text{दूसरी भुजा } 3(x+1) = 3(7+1)$$

$$= 24 \text{ सेमी.}$$

$$\text{तीसरी भुजा} = \sqrt{(7)^2 + (24)^2}$$

$$= \sqrt{625} = 25 \text{ सेमी.}$$

22. निम्नलिखित आँकड़े किसी गाँव के 200 परिवारों के कुल मासिक घरेलू व्यय के बंटन को दर्शाते हैं। इन परिवारों का बहुलक मासिक व्यय ज्ञात कीजिए।

व्यय (रूपयों में)	परिवारों की संख्या
1000-1500	24 →
1500-2000	40 →
2000-2500	33 →
2500-3000	28
3000-3500	30
3500-4000	22
4000-4500	16
4500-5000	7

f_0
 f_1 बहुलक वर्ग
 f_2

यहाँ बहुलक वर्ग 1500-2000, अधिक बारम्बारता 40

$$\text{अतः } l = 1500 \text{ व } h = 500$$

$$\text{अतः बहुलक } z = 1 + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

$$= 1500 + \left(\frac{40 - 24}{2 \times 40 - 24 - 33} \right) \times 500$$

$$= 1500 + \frac{16}{23} \times 500 = 1500 + \frac{8000}{23}$$

$$= 1500 + 347.83 = 1847.83$$

अथवा

निम्नलिखित सारणी 400 नियोक्तों के जीवन काल को प्रदर्शित करती है एक लेंप का माध्यक जीवन काल ज्ञात कीजिए।

जीवन काल में (घंटों में)	लेंपों की संख्या
1500-2000	14
2000-2500	56
2500-3000	60
3000-3500	86
3500-4000	74
4000-4500	62
4500-5000	48

उत्तर

जीवन काल में (घंटों में)	लेंपों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (cf)
1500-2000	14	14
2000-2500	56	70
2500-3000	60	130
3000-3500	86	216
3500-4000	74	290
4000-4500	62	352
4500-5000	48	400

$$\Sigma f = 400 = N, \quad \frac{N}{2} = 200$$

यहाँ 200 से ठीक बड़ी cf = 216

अतः माध्यक वर्ग 3000-3500 होगा।

जहाँ

$$l = 3000$$

$$cf = 130$$

$$f = 86$$

$$h = 500$$

$$\text{अतः माध्यक } M = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - c}{f} \right) \times h$$

$$= 3000 + \left(\frac{200 - 130}{86} \right) \times 500$$

$$= 3000 + \frac{70 \times 500}{86} = 3000 + \frac{3500}{86}$$

$$= 3000 + 406.98 = 3406.98$$

अतः माध्यक जीवनकाल = 3406.98 घंटे